Γραμμικά συστήματα συνεχούς χρόνου

Με τον όρο σύστημα αναφερόμαστε σε κάθε φυσική διάταξη που παράγει ένα σήμα εξόδου σε απόκριση ενός σήματος εισόδου. Είναι συνηθισμένο να αναφέρουμε το σήμα εισόδου σαν διέγερση (excitation) και το σήμα εξόδου σαν απόκριση (response). Σε ένα γραμμικό (linear) σύστημα ισχύει η αρχή της υπέρθεσης (principle of superposition), δηλαδή η απόκριση ενός γραμμικού συστήματος σε έναν αριθμό διεγέρσεων, τα οποία εφαρμόζονται ταυτόχρονα είναι ίση με το άθροισμα των αποκρίσεων του συστήματος όταν κάθε μία από αυτές τις διεγέρσεις εφαρμόζεται ξεχωριστά.

Αρχή της υπέρθεσης:

$$Sys\{a_1x_1(t) + a_2x_2(t)\} \; = \; a_1Sys\{x_1(t)\} \; + \; a_2Sys\{x_2(t)\} \;\; (1.1)$$

Τέτοια συστήματα θα μελετήσουμε στην συνέχεια. Μας δίνονται τα παρακάτω συστήματα για τα οποία πρέπει να αποφασίσουμε αν είναι γραμμικά η όχι.

a. y(t) = 5 x(t)
b. y(t) = 5 x(t) + 3
c. y(t) = 3 [x (t)] ^{2}
d. y(t) = cos (x (t))

Αρχικά θα το λύσουμε σύμφωνα με την αρχή της υπέρθεσης (εξ. 1.1)

a. Έστω ότι εφαρμόζονται δύο σήματα εισόδου $x_1(t)$ και $x_2(t)$. Θα παραχθούν στην έξοδο τα σήματα $y_1(t) = 5\,x_1(t)$ και $y_2(t) = 5\,x_2(t)$. Αν η είσοδος είναι $x(t) = a_1\,x_1(t) + a_2\,x_2(t)$ τότε η έξοδος υπολογίζεται ως εξής
   $y(t) = 5x(t)$
   $= 5[\,a_1\,x_1(t) + a_2\,x_2(t)] = a_1\,[5x_1(t)] + a_2[5\,x_2(t)] = a_1\,y_1(t) + a_2y_2(t)$
   Επομένως ισχύει η αρχή της υπέρθεσης και το σύστημα **είναι γραμμικό**.

b. Έστω ότι εφαρμόζονται δύο σήματα εισόδου $x_1(t)$ και $x_2(t)$. Θα παραχθούν στην έξοδο τα σήματα $y_1(t) = 5\,x_1(t) + 3$ και $y_2(t) = 5\,x_2(t) + 3$. Αν η είσοδος είναι $x(t) = a_1\,x_1(t) + a_2\,x_2(t)$ τότε η έξοδος υπολογίζεται ως εξής
   $y(t) = 5x(t) + 3 == 5a_1\,x_1(t) + 5a_2\,x_2(t) + 3$
   Η έξοδος σε αυτή την περίπτωση δεν μπορεί να εκφραστεί με την μορφή $a_1\,y_1(t) + a_2y_2(t)$, συνεπώς το σύστημα αυτό **δεν είναι γραμμικό**.

c. Έστω ότι εφαρμόζονται δύο σήματα εισόδου $x_1(t)$ και $x_2(t)$. Θα παραχθούν στην έξοδο τα σήματα $y_1(t) = 3[x_1(t)]^2$ και $y_2(t) = 3[x_2(t)]^2$. Αν η είσοδος είναι ο γραμμικός συνδυασμός $x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$, τότε η έξοδος που παράγεται είναι $y(t) = 3[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)]^2 = 3a_1^2 x_1(t)^2 + 3a_2^2 x_2(t)^2 + 6a_1 x_1(t) a_2 x_2(t)$
Η έξοδος σε αυτή την περίπτωση δεν μπορεί να εκφραστεί με την μορφή $a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$, συνεπώς το σύστημα αυτό **δεν είναι γραμμικό**
d. Έστω ότι εφαρμόζονται δύο σήματα εισόδου $x_1(t)$ και $x_2(t)$. Θα παραχθούν στην έξοδο $y_1(t) = cos[x_1(t)]$ και $y_2(t) = cos[x_2(t)]$. Αν η είσοδος είναι $x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$ τότε η έξοδος υπολογίζεται ως εξής $y_1(t) = cos[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)]$, συνεπώς το σύστημα αυτό **δεν είναι γραμμικό**.

Ας δούμε τώρα τα παραπάνω συστήματα στο MATLAB

Αρχικά θα ξεκινήσουμε με την δημιουργία του πίνακα t και τα σήματα x1 και x2

```
t = [0:0.01:4];                 % Create a time vector
x1 = cos(2*pi*5*t);             % Test signal 1
x2 = exp(-0.5*t);               % Test signal 2
alpha1 = 2;                     % Set parameters alpha1
alpha2 = 1.25;                  %   and alpha2
x = alpha1*x1+alpha2*x2;        % Combined signal
plot(t,x)
```

Η μέθοδος που θα ακολουθήσουμε βασίζεται στην δημιουργία μία συνάρτησης για κάθε σύστημα. Θα μπορούσαμε να έχουμε δηλαδή ένα αρχείο sys_a.m και να γράψουμε

```
function y = sys_a(x)
y=5*x;
```

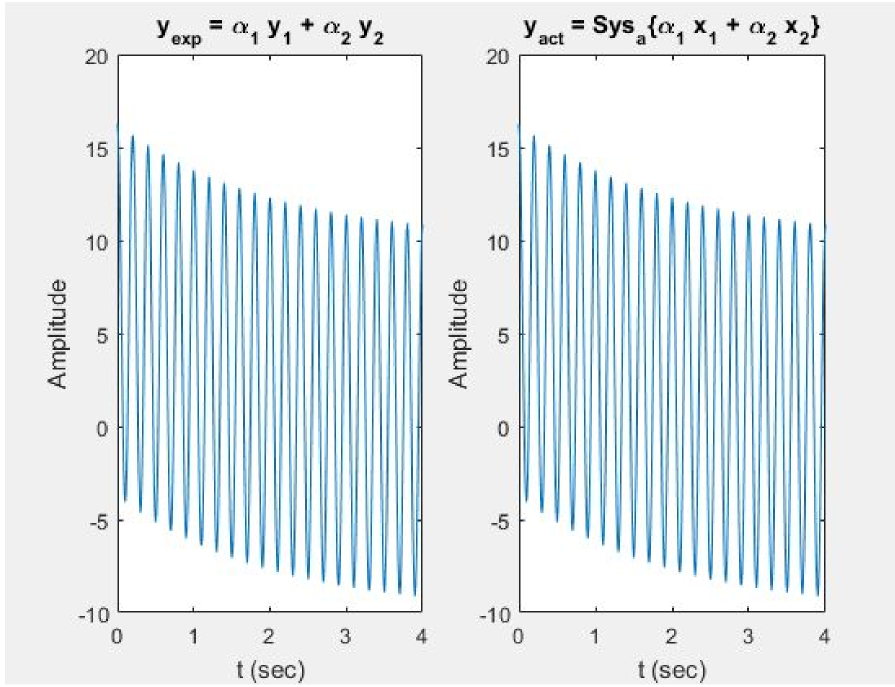
Αυτές οι δύο γραμμές μπορούν να αντικατασταθούν με αυτό που ονομάζεται **anonymous functions** στο MATLAB. Μία τέτοια συνάρτηση δεν χρειάζεται ξεχωριστό αρχείο αλλά γράφεται με αυτή την μορφή απευθείας στο command window.

```
sys_a = @ (x) 5 * x
```

Και το παράδειγμα ολοκληρωμένο δίνεται παρακάτω:

```
% Script : linearity.m
%
t = [0:0.01:4];                 % Create a time vector
```

```
x1 = cos(2*pi*5*t);            % Test signal 1
x2 = exp(-0.5*t);              % Test signal 2
alpha1 = 2;                    % Set parameters alpha1
alpha2 = 1.25;                 %   and alpha2
x = alpha1*x1+alpha2*x2;       % Combined signal
% Define anonymous functions for the systems in Example 1
sys_a = @(x) 5*x;
sys_b = @(x) 5*x+3;
sys_c = @(x) 3*x.*x;
sys_d = @(x) cos(x);
% Test the system in part (a) of Example 1
y1 = sys_a(x1);
y2 = sys_a(x2);
y_exp = alpha1*y1+alpha2*y2;  % Expected response for a linear system
y_act = sys_a(x);              % Actual response
clf;                           % Clear figure
subplot(1,2,1);
plot(t,y_exp);                 % Graph expected response
title('y_{exp} = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2')
xlabel('t (sec)');
ylabel('Amplitude');
subplot(1,2,2);
plot(t,y_act);                 % Graph actual response
title('y_{act} = Sys_a\{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\}')
xlabel('t (sec)');
ylabel('Amplitude');
```

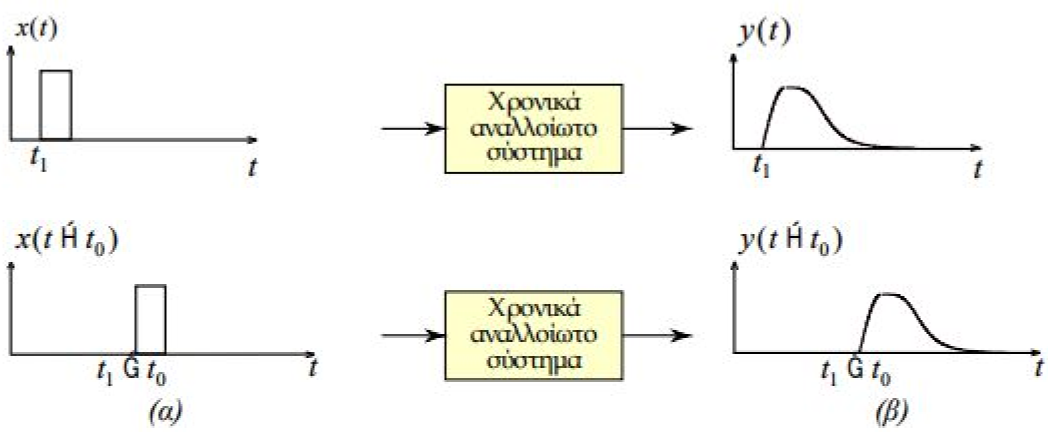


Παρατηρούμε ότι τα δύο σήματα είναι ίδια, και έτσι έχουμε αποδείξει ότι το σύστημα (α) είναι γραμμικό. Προσοχή: για να είναι γραμμικό ένα σύστημα πρέπει να ισύει η υπέρθεση για οποιαδήποτε δύο σήματα και όχι μόνο για αυτά που επιλέξαμε στο παράδειγμα αυτό.

Χρονικά αμετάβλητα συστήματα συνεχούς χρόνου.

Ένα σύστημα λέγεται χρονικά αμετάβλητο (time invariant) αν και μόνο αν χρονικές ολισθήσεις του σήματος εισόδου μεταφράζονται σε αντίστοιχες χρονικές ολισθήσεις στην έξοδο.

$$Sys\{x(t)\} \;=\; y(t) \text{ implies that } Sys\{x(t-\tau)\} = y(t-\tau) \quad (1.2)$$



(α) Η είσοδος και (β) η έξοδος ενός συστήματος χρονικά αναλλοίωτου. (Σχήμα από http://cgi.di.uoa.gr/~k14/sig_sys2.pdf)

Δίνονται 3 διαφορετικά συστήματα για το οποία μας ζητείται να αποφασίσουμε αν είναι ΧΑ .

a. y(t) = 5 x(t)
b. y(t) = 3 cos(x(t))
c. y(t) = 3 cos(t) x(t)

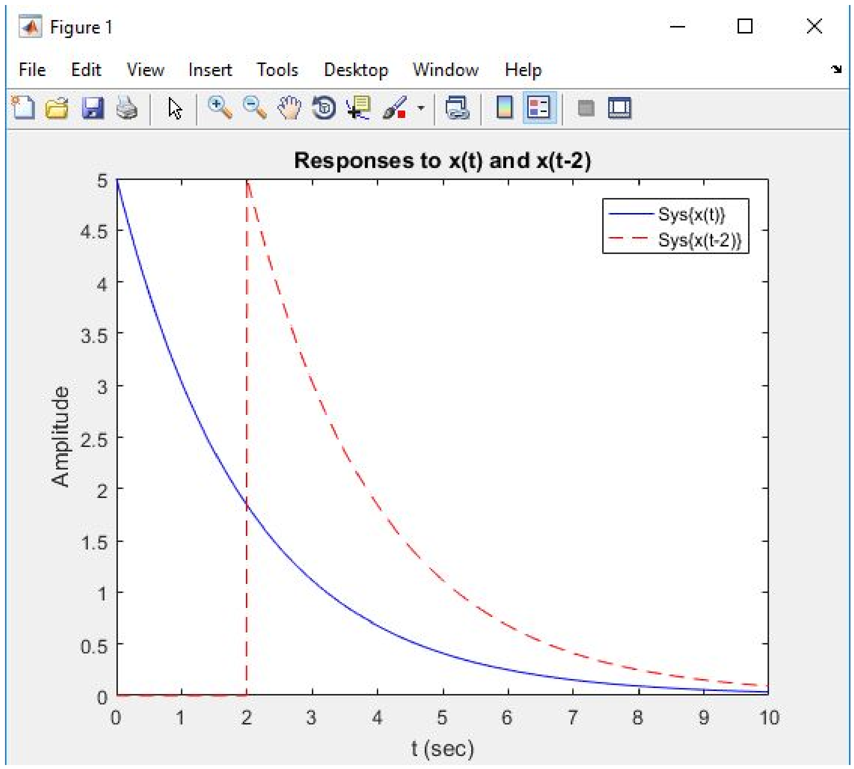
Ας ξεκινήσουμε να λύνουμε το παράδειγμα με αυτά που ξέρουμε από την θεωρία (δηλ. την εξίσωση 1.2)

a. Για αυτό το σύστημα , αν η είσοδος x(t) καθυστερήσει κατά χρόνο τ δευτερόλεπτα η αντίστοιχη έξοδος θα είναι
   $Sys\{x(t-\tau)\} = 5x(t-\tau) = y(t-\tau)$.
   Συνεπώς το σύστημα **είναι ΧΑ.**
b. Για αυτό το σύστημα , αν η είσοδος x(t) καθυστερήσει κατά χρόνο τ δευτερόλεπτα η αντίστοιχη έξοδος θα είναι
   $Sys\{x(t-\tau)\} = 3cos(x(t-\tau)) = y(t-\tau)$
   Συνεπώς το σύστημα **είναι ΧΑ.**
c. Για αυτό το σύστημα , αν η είσοδος x(t) καθυστερήσει κατά χρόνο τ δευτερόλεπτα η αντίστοιχη έξοδος θα είναι
   $Sys\{x(t-\tau)\} = 3cos(t)\, x(t-\tau) \neq y(t-\tau)$
   Συνεπώς το σύστημα **δεν είναι ΧΑ.**

Στην συνέχεια θα λύσουμε τα παραπάνω παραδείγματα στο MATLAB.
Το σήμα x(t) με το οποίο θα δοκιμάσουμε την χρονική μεταβλητότητα για το σύστημα (α) είναι
$x(t) = e^{-0.5t}u(t)$

```
% Script :time_invariant_a.m
%
t = [0:0.01:10];                % Create a time vector
x = @(t) exp(-0.5*t).*(t>=0);   % Anonymous function for test signal
% Define anonymous functions for the systems in Example 2
sys_a = @(x) 5*x;
sys_b = @(x) 3*cos(x);
sys_c = @(x) 3*cos(t).*x;
% Test the system in part (a) of Example 2
y1 = sys_a(x(t));
y2 = sys_a(x(t-2));
clf;                            % Clear figure
plot(t,y1,'b-',t,y2,'r--');     % Graph the two responses
```

```
title('Responses to x(t) and x(t-2)')
xlabel('t (sec)');
ylabel('Amplitude');
legend('Sys\{x(t)\}','Sys\{x(t-2)\}');
```



ΑΣΚΗΣΗ 1 : Χρησιμοποιώντας το παραπάνω παράδειγμα να αποδείξουμε την γραμμικότητα η μη και των άλλων συστημάτων.

ΑΣΚΗΣΗ 2: Χρησιμοποιώντας το παραπάνω παράδειγμα να δείξουμε στο MATLAB αν είναι ΧΑ και τα υπόλοιπα συστήματα.