K21 - Συστήματα Επικοινωνιών

4ο Εξάμηνο
Τομέας Γ’ / Τμήμα Πληροφορικής και Επικοινωνιών
ΕΚΠΑ 2024-2025
Τυχαίες διαδικασίες

Γιώργος Κανέλλος

Επίκουρος Καθηγητής
Τμήμα Πληροφορικής και Επικοινωνιών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
gtkanellos@di.uoa.gr

Συστήματα Επικοινωνιών

Τυχαίες Διαδικασίες
- Στασιμότητα
- Φάσμα

Θερμικός Θόρυβος
- Λευκός Θόρυβος
- Τυπική Διάταξη Δέκτη

Τυχαίες Διαδικασίες (1/2)

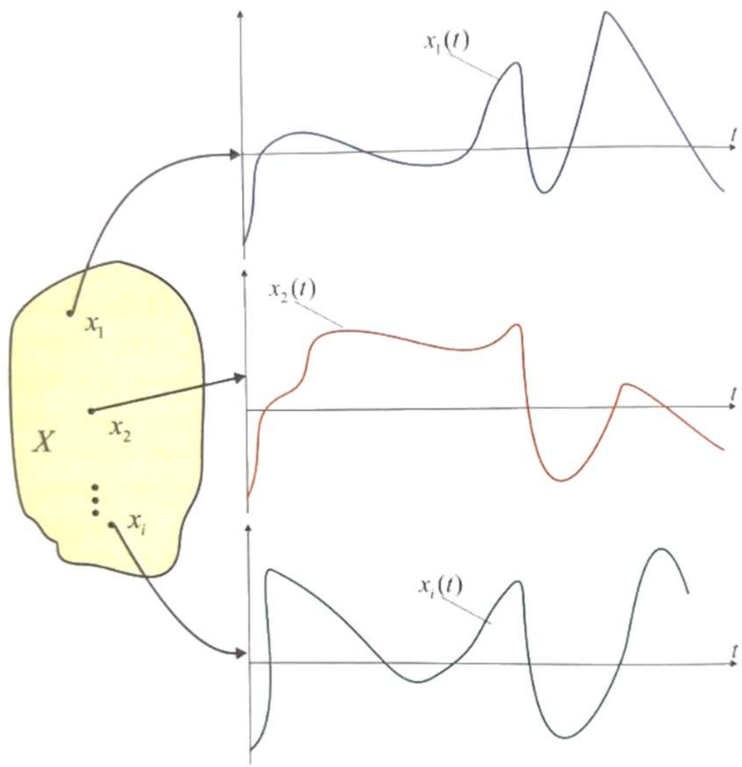
- Έστω το σήμα $x(t) = Acos(2\pi f_0 t + \phi)$ όπου το ϕ είναι τυχαία μεταβλητή με τιμές στο διάστημα $[-\pi, \pi]$.
- Έστω ο συμβολισμός $x_i(t)$ για το τυχαίο σήμα $x(t)$ για συγκεκριμένο ϕ_i. Το $x_i(t)$ ονομάζεται *δείγμα* του τυχαίου σήματος.
- Το σύνολο $X(t) \triangleq \{x_i(t) | \forall \phi_i \in [-\pi, \pi]\}$ ονομάζεται *Τυχαία Διαδικασία (ΤΔ)*.

Τυχαίες Διαδικασίες (2/2)

Συνοπτικά:

- $x_i(t)$: κυματομορφή δείγμα.
- $X(t_i)$: Τυχαία Διαδικασία (ΤΔ) που προκύπτει από τη τυχαία μεταβλητή (ΤΜ) τη χρονική στιγμή t_i.
- $x_i(t_j)$: τιμή της κυματομορφής με φάση ϕ_i τη χρονική στιγμή t_j.

Τυχαία διαδικασία



Σχήμα 3.1: Τυχαία διαδικασία

Παράδειγμα Τυχαίας Διαδικασίας (1/3)

Παράδειγμα

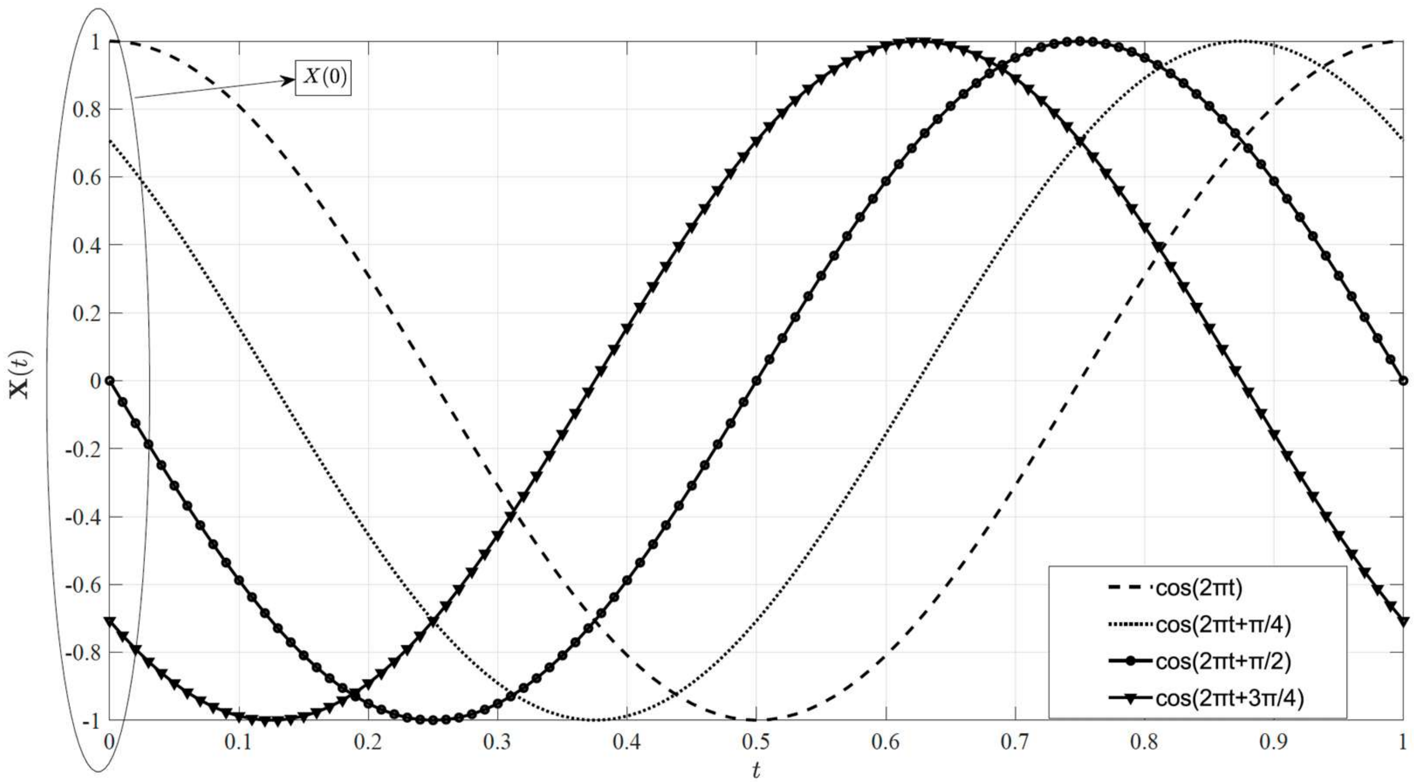
Έστω η ΤΔ $X(t) = cos(2\pi t + \phi)$ όπου ϕ ΤΜ που παίρνει τις τιμές 0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$ με ίση πιθανότητα.

- Οι ισοπίθανες κυματομορφές δείγματα είναι:

$$x_1(t) = cos(2\pi t), \qquad x_2(t) = cos(2\pi t + \frac{\pi}{4}),$$

$$x_3(t) = cos(2\pi t + \frac{\pi}{2}), \qquad x_4(t) = cos(2\pi t + \frac{3\pi}{4}).$$

Παράδειγμα Τυχαίας Διαδικασίας (2/3)



Παράδειγμα Τυχαίας Διαδικασίας (3/3)

- Η *συνάρτηση μάζας πιθανότητας (probability mass function)* της διακριτής ΤΜ $X(0)$ είναι:

$$f_{X(0)}(a) = \begin{cases} 0.25, & a = 1 \\ 0.25, & a = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0.25, & a = 0 \\ 0.25, & a = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

- Στην περίπτωση συνεχούς ΤΜ ορίζεται η *συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (probability density function).*

Κατηγορίες Τυχαίων Διαδικασιών

- *Συνεχούς χρόνου:* η ΤΔ $X(t) = \{X(t_1), X(t_2), ..\}$ είναι συλλογή από ΤΜ με $t_1, t_2, \ldots \in \mathbb{R}$.
- *Διακριτού χρόνου:* η ΤΔ $X(t) = \{X(t_1), X(t_2), \ldots\}$ είναι συλλογή (άπειρη ή πεπερασμένη) από ΤΜ με $t_1, t_2, \ldots \in \mathbb{Z}$.
- Συνεχής: Αν η ΤΜ $X(t_i)$ $\forall i$ παίρνει τιμές σε ένα συνεχές διάστημα.
- Διακριτή: Αν η ΤΜ $X(t_i)$ $\forall i$ παίρνει μόνο διακριτές τιμές.

Μέση Τιμή

- Η μέση τιμή της ΤΔ $X(t)$:

$$m_X(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} a f_{X(t)}(a) da \quad (\text{συνεχής ΤΔ}),$$

$$m_X(t) \triangleq \sum_{-\infty}^{\infty} a_i \Pr\left[x_i(t) = a_i\right] \quad (\text{διακριτή ΤΔ}).$$

- Η $m_X(t)$ είναι συνάρτηση του χρόνου με τιμές για κάθε χρονική στιγμή t_i:

$$m_X(t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} a f_{X(t_i)}(a) da.$$

Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης

- Η *συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (autocorrelation function)*:

$$R_X(t_i, t_j) \triangleq E[X(t_i)X(t_j)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} ab f_{X(t_i),X(t_j)}(a, b)\,da\,db.$$

- Για πραγματικές ΤΔ η συνάρτηση αυτή είναι συμμετρική:

$$R_X(t_i, t_j) = R_X(t_j, t_i).$$

Αυτοσυνδιακύμανση και Ετεροσυσχέτιση

- Η *συνάρτηση αυτοσυνδιακύμανσης* (*autocovariance function*) ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} \mathrm{C}_X(t_i, t_j) &\triangleq E[(X(t_i) - m_X(t_i))(X(t_j) - m_X(t_j))] \\ &= R_X(t_i, t_j) - m_X(t_i) m_X(t_j). \end{aligned}$$

- Η *συνάρτηση ετεροσυσχέτισης* (*cross-correlation function*) ορίζεται για δύο ΤΔ $X(t)$ και $Y(t)$ ως:

$$\begin{aligned} R_{X,Y}(t_1, t_2) &\triangleq E[X(t_1) Y(t_2)], \\ R_{Y,X}(t_1, t_2) &= E[Y(t_1) X(t_2)]. \end{aligned}$$

Ετεροσυνδιακύμανση

- Η *συνάρτηση ετεροσυνδιακύμανσης* (*cross-covariance function*) ορίζεται για δύο ΤΔ $X(t)$ και $Y(t)$ ως:

$$\mathrm{C}_{X,Y}(t_1, t_2) \triangleq R_{X,Y}(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_Y(t_2).$$

- Οι ΤΔ $X(t)$ και $Y(t)$ είναι *ορθογώνιες* μεταξύ τους αν:

$$R_{X,Y}(t_1, t_2) = 0 \quad \forall t_1, t_2.$$

- Οι ΤΔ $X(t)$ και $Y(t)$ είναι *ασυσχέτιστες* αν:

$$\mathrm{C}_{X,Y}(t_1, t_2) = 0 \quad \forall t_1, t_2.$$

Άσκηση 1

Άσκηση 1

Έστω η ΤΔ $X(t) = A\cos(2\pi f_1 t + \phi)$ με A και f_1 σταθερές και $\phi \sim \mathcal{U}[0, \pi]$:

$$f_\phi(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \phi \in [0, \pi] \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}.$$

Επίσης, έστω η ΤΔ $Y(t) = \alpha\cos(2\pi f_2 t)$ με f_2 σταθερά και $\alpha \sim \mathcal{U}[0, 2]$:

$$f_\alpha(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \alpha \in [0, 2] \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}.$$

Αν οι ΤΜ α και ϕ είναι ανεξάρτητες, να υπολογιστούν: $m_X(t)$, $m_Y(t)$, $R_X(t_1, t_2)$, $R_{X,Y}(t_1, t_2)$ και $\mathrm{C}_{\mathrm{X,Y}}(t_1, t_2)$.

Λύση Άσκησης 1 (1/5)

- Η μέση τιμή $m_X(t)$ υπολογίζεται:

$$m_X(t) = \int_0^{\pi} A\cos(2\pi f_1 t + \phi)\, f_\phi(\phi) d\phi = \frac{A}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(2\pi f_1 t + \phi)\, d\phi$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{A}{\pi}\left(\frac{d}{d\phi}\sin(2\pi f_1 t + \phi)\right) d\phi$$

$$= \frac{A}{\pi}[\sin(2\pi f_1 t + \pi) - \sin(2\pi f_1 t)]$$

$$= \frac{A}{\pi}[-\sin(2\pi f_1 t) - \sin(2\pi f_1 t)]$$

$$= -\frac{2A}{\pi}\sin(2\pi f_1 t).$$

Λύση Άσκησης 1 (2/5)

- Ανάλογα, η μέση τιμή $m_Y(t)$ υπολογίζεται:

$$m_Y(t) = \int_0^2 \alpha \cos(2\pi f_2 t)\, f_\alpha(\alpha) d\alpha$$

$$= \cos(2\pi f_2 t) \int_0^2 \frac{\alpha}{2} d\alpha$$

$$= \cos(2\pi f_2 t) \left[\frac{\alpha^2}{4}\right]_0^2 = \cos(2\pi f_2 t).$$

Λύση Άσκησης 1 (3/5)

- Η ΣΑΣ $R_X(t_1, t_2)$ υπολογίζεται:

$$
\begin{aligned}
R_X(t_1, t_2) &= E[A\cos(2\pi f_1 t_1 + \phi) A\cos(2\pi f_1 t_2 + \phi)] \\
&= \frac{A^2}{2} E\left[\cos(2\pi f_1(t_1 + t_2) + 2\phi) + \cos(2\pi f_1(t_1 - t_2))\right] \\
&= \frac{A^2}{2} \underbrace{E\left[\cos(2\pi f_1(t_1 + t_2) + 2\phi)\right]}_{=0} + \frac{A^2}{2} E\left[\cos(2\pi f_1(t_1 - t_2))\right] \\
&= \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_1(t_1 - t_2)).
\end{aligned}
$$

Λύση Άσκησης 1 (4/5)

- Η ετεροσυσχέτιση υπολογίζεται ως $R_{X,Y}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)]$.
- Λόγω ανεξαρτησίας των ΤΜ α και ϕ προκύπτει:

$$
\begin{aligned}
R_{X,Y}(t_1, t_2) &= E[X(t_1)]E[Y(t_2)] = m_X(t_1)m_Y(t_2) \\
&= -\frac{2A}{\pi}\sin(2\pi f_1 t_1)\cos(2\pi f_2 t_2).
\end{aligned}
$$

Λύση Άσκησης 1 (5/5)

- Η ετεροσυνδιακύμανση υπολογίζεται:

$$\begin{aligned} \mathrm{C}_{X,Y}(t_1,t_2) &= R_{X,Y}(t_1,t_2) - m_X(t_1)m_Y(t_2) \\ &= m_X(t_1)m_Y(t_2) - m_X(t_1)m_Y(t_2) = 0. \end{aligned}$$

- Συνεπώς, οι ΤΔ $X(t)$ και $Y(t)$ είναι ασυσχέτιστες, αναμενόμενο λόγω της ανεξαρτησίας των ΤΜ α και ϕ.

Αυστηρά Στάσιμη

- Η ΤΔ X(t) είναι *αυστηρά στάσιμη* (stationary in the strict sense) αν $\forall\tau$ οι ΤΔ $X(t)$ και $X(t+\tau)$ έχουν την ίδια στατιστική:

$$f_{X(t_1),X(t_2),\ldots}(a_1, a_2, \ldots) = f_{X(t_1+\tau),X(t_2+\tau),\ldots}(a_1, a_2, \ldots) \text{ ή}$$

$$f_{X(t)}(\mathbf{a}) = f_{X(t+\tau)}(\mathbf{a}).$$

- Ορίζονται κι οι στασιμότητες μικρότερων τάξεων, πχ:
  - 1ης τάξης: $f_{X(t_1)}(a) = f_{X(t_1+\tau)}(a)$,
  - 2ης τάξης: $f_{X(t_1),X(t_2)}(a_1, a_2) = f_{X(t_1+\tau),X(t_2+\tau)}(a_1, a_2)$.

Στάσιμη Υπό την Ευρεία Έννοια (1/2)

- Μια ΤΔ $X(t)$ λέγεται *στάσιμη υπό την ευρεία έννοια (wide sense stationary)* αν:
  - $m_X(t) = m_X \ \forall t$,
  - $R_X(t_i, t_j) = R_X(t_i - t_j) = R_X(\tau)$.
- Δηλαδή, η μέση τιμή της $X(t)$ είναι σταθερή $\forall t$ κι η ΣΑΣ της εξαρτάται μόνο απο τη διαφορά των δειγματολειπτημένων χρόνων και όχι από κάθε ζεύγος χρονικών στιγμών χωριστά.

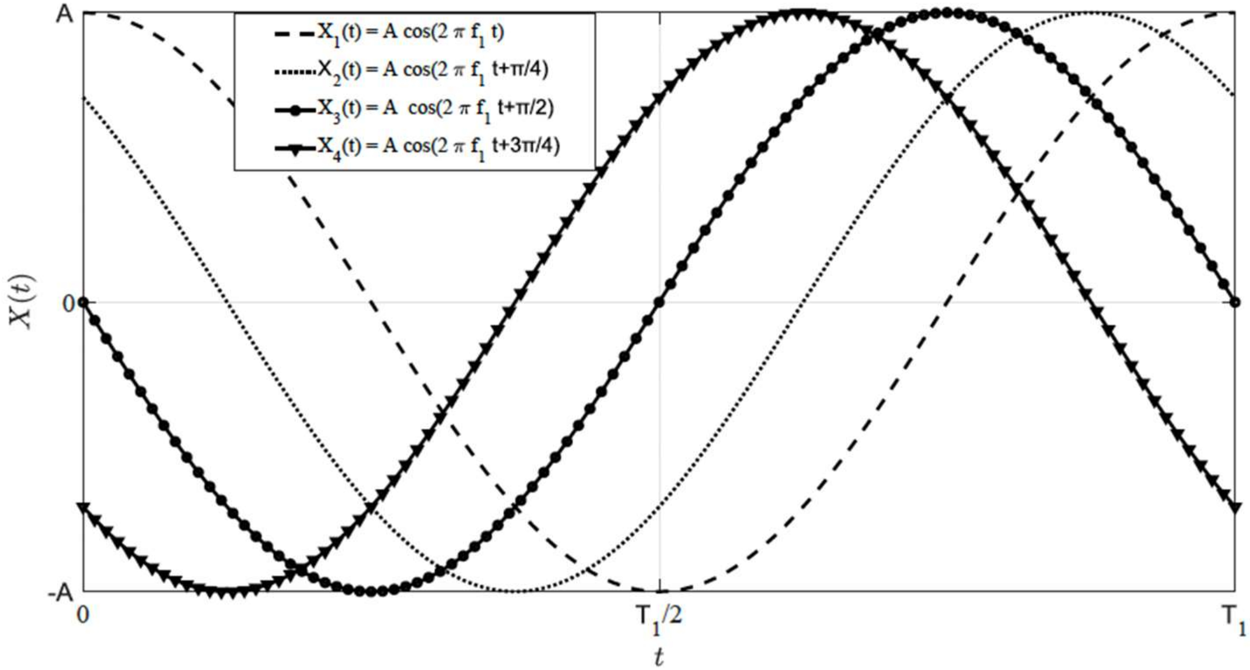
Στάσιμη Υπό την Ευρεία Έννοια (2/2)

- Η αυτοσυνδιακύμανση είναι επίσης συνάρτηση μόνο της χρονικής μετατόπισης τ, δηλαδή $\mathrm{C}_X(\tau) \triangleq \mathrm{C}_X(t, t+\tau) = R_X(\tau) - m_X^2$.
- Η στατιστική μέση τιμή είναι ανεξάρτητη του χρόνου και μπορεί να υπολογισθεί οποιαδήποτε χρονική στιγμή.
- Όταν μια ΤΔ είναι στάσιμη υπό την αυστηρή έννοια τότε είναι και στάσιμη υπό την ευρεία έννοια, το αντίστροφο δεν ισχύει.

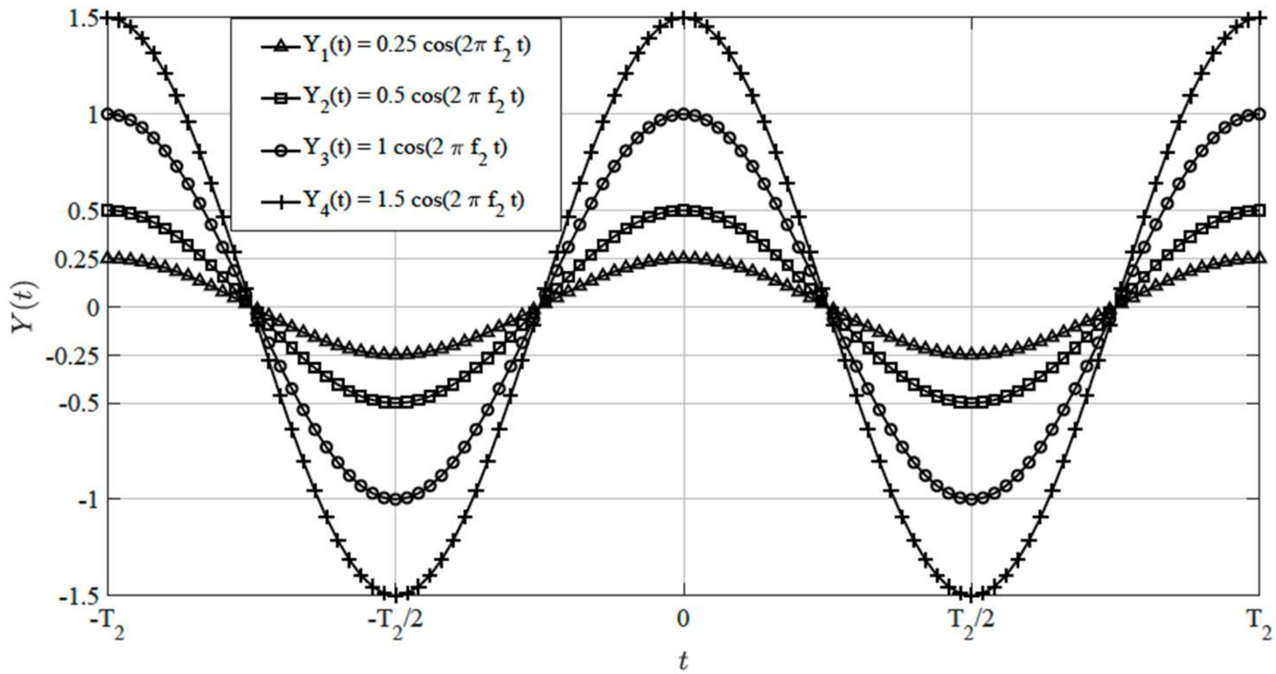
Παράδειγμα

- Οι ΤΔ $X(t)$ και $Y(t)$ της Άσκησης 1 δεν είναι WSS αφού:
  - $E[X(t)] = -\frac{2A}{\pi}\sin(2\pi f_1 t)$,
  - $E[Y(t)] = \cos(2\pi f_2 t)$.

Συναρτήσεις Δείγματα της $X(t) = A\cos(2\pi f_1 t + \phi)$



Συναρτήσεις Δείγματα της Y (t) = α $\cos(2\pi f_2 t)$



Ασκήσεις 2 και 3

Άσκηση 2

Να δειχθεί ότι η ΤΔ $Z(t) = A\cos(2\pi f t + \theta)$ με A και f σταθερές και $\theta \sim \mathcal{U}[0, 2\pi]$ είναι WSS.

Άσκηση 3

Να δειχθεί ότι εάν μια ΤΔ WSS $X(t)$ έχει σταθερή μέση τιμή $m_X \neq 0$ τότε η ΣΑΣ της $R_X(\tau)$ έχει ένα σταθερό όρο.

Λύση Άσκησης 3

- Η $X(t)$ μπορεί να γραφτεί ως $X(t) = m_X + N(t)$, όπου $N(t)$ μια ΤΔ με μηδενική μέση τιμή.
- Η ΣΑΣ της $X(t)$ υπολογίζεται:

$$
\begin{aligned}
R_X(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] &= E[(m_X + N(t))(m_X + N(t+\tau))] \\
&= E[m_X^2 + m_X N(t) + m_X N(t+\tau) + N(t)N(t+\tau)] = \\
&= m_X^2 + m_X E[N(t)] + m_X E[N(t+\tau)] + E[N(t)N(t+\tau)] \\
&= m_X^2 + R_N(\tau).
\end{aligned}
$$

Χρονική Μέση τιμή και ΣΑΣ

- Για κάθε κυματομορφή δείγμα $x_i(t)$ της ΤΔ $X(t)$ ορίζονται η χρονική μέση τιμή κι η ΣΑΣ της:

$$E[x_i(t)] \triangleq \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_i(t)dt,$$

$$R_{x_i}(\tau) \triangleq \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_i(t)x_i(t+\tau)dt.$$

Εργοδικότητα ως προς τη Μέση τιμή

- Μια στάσιμη ΤΔ $X(t)$ ονομάζεται *εργοδική ως προς τη μέση τιμή* αν οι χρονικές μέσες τιμές των κυματομορφών δειγμάτων της είναι ίσες μεταξύ τους:

$$E[x_i(t)] = E[X(t)] \quad \forall i.$$

- Στην περίπτωση αυτή ισχύει για την ΤΔ $X(t)$ ότι:

$$E[X(t)] = m_X.$$

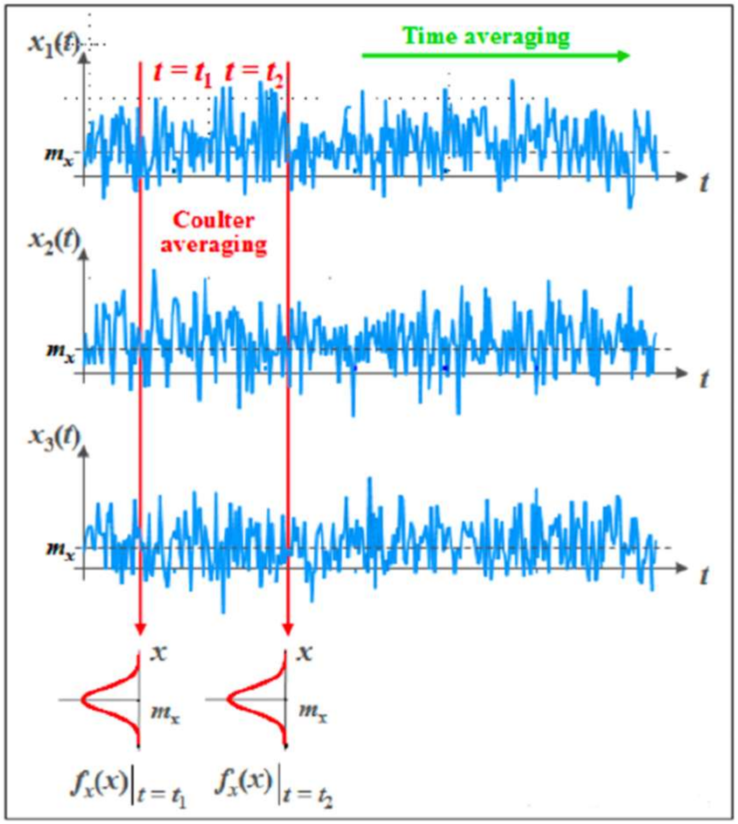
Εργοδικότητα ως προς την ΣΑΣ

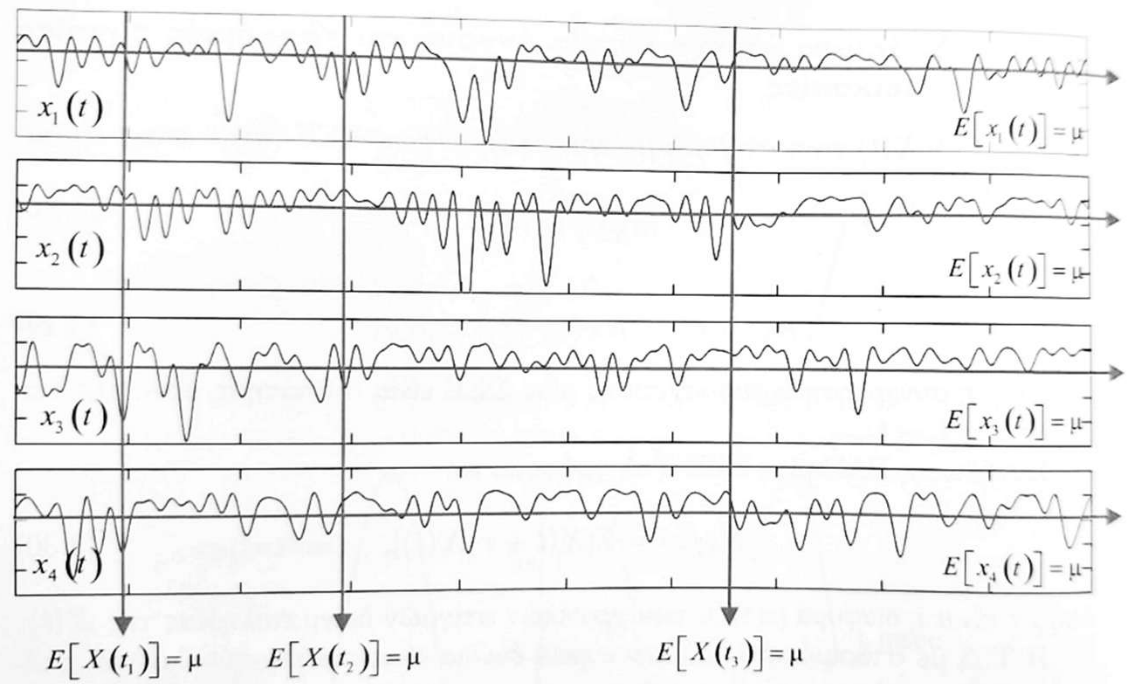
- Μια στάσιμη ΤΔ $X(t)$ ονομάζεται *εργοδική ως προς την αυτοσυσχέτιση* αν οι χρονικές αυτοσυσχετίσεις των κυματομορφών δειγμάτων της είναι ίσες μεταξύ τους και ίσες με την στατιστική ΣΑΣ:

$$R_{x_i}(\tau) = R_X(\tau) \quad \forall i.$$

- Στα ΣΕ, οι ΤΔ υπό μελέτη θεωρούνται (συνήθως) εργοδικές ως προς τη ΣΑΣ.
- Η εργοδικότητα αποτελεί πολύ σημαντική ιδιότητα καθώς παρατηρώντας το $x_i(t)$ για μια κυματομορφή δείγμα προκύπτει πληροφορία για *ολόκληρη* την ΤΔ $X(t)$.

Εργοδική Διαδικασία





Σχήμα 3.5: Εργοδική τυχαία διαδικασία

Άσκηση 5

Άσκηση 5

Εξετάστε ως προς την εργοδικότητα την ΤΔ
$Z(t) = A cos(2\pi f t + \theta)$ της Άσκησης 2.

Λύση Άσκησης 5 (1/3)

- Έστω η κυματομορφή δείγμα της ΤΔ $Z(t)$:
  $z_i(t) = A\cos(2\pi ft + \theta_i)$. Αρκεί να δείξουμε ότι:
  $E[z_i(t)] = E[Z(t)] = m_Z\ \forall i$.
- Συνεπώς:

$$
\begin{aligned}
E[z_i(t)] &= \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} z_i(t)dt = A\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\cos(2\pi ft+\theta_i)dt \\
&= \frac{A}{2\pi f}\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left(\frac{d}{dt}\sin(2\pi ft+\theta_i)\right)dt \\
&= \frac{A}{2\pi f}\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\left[\sin\left(2\pi f(T/2)+\theta_i\right)-\sin\left(2\pi f(-T/2)+\theta_i\right)\right] \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Λύση Άσκησης 5 (2/3)

- Εργοδικότητα ως προς την αυτοσυσχέτιση: $R_{z_i}(\tau) = R_Z(\tau)\ \forall i$.
- Συνεπώς:

$$R_{z_i}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} z_i(t) z_i(t+\tau) dt$$

$$= A^2 \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi f t + \theta_i) \cos(2\pi f (t+\tau) + \theta_i) dt$$

$$= \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f \tau) \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 1 dt$$

$$+ \frac{A^2}{2} \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi f (2t+\tau) + 2\theta_i) dt$$

Λύση Άσκησης 5 (3/3)

- Άρα:

$$
\begin{aligned}
R_{z_i}(\tau) &= \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f\tau) \\
&\quad + \frac{A^2}{8\pi f}\underbrace{\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\sin(2\pi f(T+\tau)+2\theta_i)}_{=0,\ \text{αφού}\ |\sin(a)|\leq 1} \\
&\quad - \frac{A^2}{8\pi f}\underbrace{\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\sin(2\pi f(-T+\tau)+2\theta_i)}_{=0} \\
&= \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f\tau).
\end{aligned}
$$

Μετασχηματισμός Fourier και Συνάρτηση Rx (τ)

- Η φασματική πυκνότητα ενέργειας ενός σήματος ενέργειας $x(t)$ με $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ προκύπτει ως:

$$\mathcal{F}\{\mathcal{R}_x(\tau)\} = |X(f)|^2.$$

(Απόδειξη: $\mathcal{F}\{\mathcal{R}_x(\tau)\} = \mathcal{F}\{x(\tau) * x^*(-\tau)\} = X(f)X^*(f) = |X(f)|^2$)

- Για ένα περιοδικό σήμα ισχύος $x(t)$ η φασματική πυκνότητα ισχύος προκύπτει ως:

$$\mathcal{S}_x(f) \triangleq \mathcal{F}\{\mathcal{R}_x(\tau)\}.$$

Φασματική Πυκνότητα Ισχύος

- Η *φασματική πυκνότητα ισχύος* (*power spectral density*) ενός σήματος ισχύος προκύπτει από το μετασχηματισμό Fourier της ΣΑΣ του.

- Με τον ίδιο τρόπο ορίζεται κι η ΦΠΙ μιας στάσιμης (αυστηρά ή υπό την ευρεία έννοια) ΤΔ:

$$\mathcal{S}_X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau,$$

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{S}_X(f) e^{j2\pi f\tau} df.$$

- Στα σήματα ισχύος, η τιμή της ΣΑΣ στο σημείο $\tau = 0$ παρέχει την ισχύ του σήματος, το ίδιο ισχύει και για τις WSS ΤΔ:

$$R_X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{S}_X(f) df = E[X^2(t)] = \mathcal{P}_X.$$

Συνέλιξη

- Η πράξη της γραμμικής συνέλιξης φανερώνει τον τρόπο με τον οποίο συνδέεται στο πεδίο του χρόνου η έξοδος ενός συστήματος ΓΧΑ με την είσοδό του.
- Η συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου μετασχηματίζεται σε πολλαπλασιασμό στο πεδίο της συχνότητας.
- Έστω ότι η WSS ΤΔ $X(t)$ διέρχεται από ένα σύστημα ΓΧΑ με κρουστική απόκριση $h(t)$. Ισχύει για τη WSS ΤΔ $Y(t)$ της εξόδου:

$$Y(t) = X(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

Η ΣΑΣ της Εξόδου Συστήματος ΓΧΑ

- Η ΣΑΣ της εξόδου $Y(t)$:

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= E\left[Y(t)Y(t+\tau)\right] = \\ &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} X(\tau_1)h(t-\tau_1)d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau_2)h(t+\tau-\tau_2)d\tau_2\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E\left[X(\tau_1)X(\tau_2)\right] h(t-\tau_1)h(t+\tau-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned}$$

- Με τις αναθέσεις $u = t - \tau_1$ και $v = t + \tau - \tau_2$ προκύπτει:

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E\left[X(t-u)X(t+\tau-v)\right] h(u)h(v)dudv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau+u-v)h(u)h(v)dudv \\ &= R_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau). \end{aligned}$$

ΦΠΙ της Εξόδου Συστήματος ΓΧΑ

- Η ΦΠΙ της WSS ΤΔ $Y(t)$ προκύπτει από το μετασχηματισμό Fourier της ΣΑΣ της. Υπενθυμίζονται οι παρακάτω ιδιότητες για δύο σήματα $x(t)$ και $y(t)$:
    - $\mathcal{F}\left[x(t) * y(t)\right] = X(f)Y(f)$.
    - Αν $x(t)$ πραγματικό, τότε $X^*(f) = X(-f)$.
- Συνεπώς, για τις WSS ΤΔ $X(t)$ και $Y(t)$ προκύπτει:

$$\mathcal{S}_Y(f) = \mathcal{F}\left[R_Y(\tau)\right] = \mathcal{S}_X(f)|H(f)|^2,$$
$$\mathcal{P}_Y = E[Y^2(t)] = R_Y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{S}_X(f)|H(f)|^2 df.$$

3. Θερμικός Θόρυβος
   - Λευκός Θόρυβος
   - Τυπική Διάταξη Δέκτη

Θερμικός Θόρυβος (1/4)

- Ο *θερμικός θόρυβος (thermal noise)* ή θόρυβος Johnson εκφράζει τη θερμική διαταραχή λόγω της θερμικής διέγερσης των ηλεκτρονίων ενός αγωγού, εξού κι η ονομασία τους.
- Έχει σπουδαία σημασία στις τηλεπικοινωνίες, αφού εμφανίζεται στις ωμικές αντιστάσεις των ηλεκτρονικών διατάξεων.
- Ο αριθμός των ηλεκτρονίων σε έναν αγωγό είναι πολύ μεγάλος και οι τυχαίες κινήσεις τους μέσα στην αντίσταση είναι στατιστικά ανεξάρτητες μεταξύ τους. Με βάση το *θεώρημα κεντρικού ορίου (central limit theorem)*, ο θερμικός θόρυβος ακολουθεί την *κατανομή Gauss* με μηδενική μέση τιμή.

Θερμικός Θόρυβος (2/4)

- Δηλαδή, αν $N(t)$ η ΤΔ της τάσης που προκύπτει από την τυχαία κίνηση των ηλεκτρονίων σε έναν αγωγό, η ΣΠΠ δίνεται:

$$f_{N(t_i)}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad \forall t_i.$$

- Η διακύμανση προκύπτει ως:

$$\sigma^2 \triangleq E[N^2(t)] = 4kTRW \ \mathrm{Volts}^2,$$

  - $k \triangleq 1.38 \times 10^{-23} \frac{J}{K}$: η σταθερά Boltzmann,
  - T: η απόλυτη θερμοκρασία σε Kelvin,
  - R: η αντίσταση σε Ohm και
  - W: το εύρος ζώνης συχνοτήτων σε Hertz.

Θερμικός Θόρυβος (3/4)

- Οι εσωτερικές διατάξεις του δέκτη παράγουν επιπρόσθετο θόρυβο που δρα αρνητικά στην ποιότητα του σήματος στην έξοδο του δέκτη. Γι'αυτό, πιο σωστά:

$$\sigma^2 = \mathbb{E}[N^2(t)] = 4k(T_e + T_i)RW,$$

  - T_i: η θερμοκρασία περιβάλλοντος και
  - T_e: είναι η ενεργός θερμοκρασία θορύβου.

- Η ενεργός θερμοκρασία θορύβου αντιστοιχεί με τη θερμοκρασία που θα έπρεπε να έχει μια αντίσταση για να παράξει τον θόρυβο που παράγεται από όλες τις ηλεκτρονικές διατάξεις του δέκτη.

Θερμικός Θόρυβος (3/4)

- Η κανονικοποιημένη ισχύς του θορύβου θεωρώντας προσαρμοσμένο φορτίο ίσο με R προκύπτει ως:

$$\mathcal{P}_N = \frac{E\left[N^2(t)\right]}{4R} = kTW \text{ Watts.}$$

- Η ΦΠΙ του θερμικού θορύβου δίνεται από τη σχέση:

$$\mathcal{S}_N(f) = \frac{kT}{2} \text{ Watts/Hz}, \quad |f| \leq 10^{12} \text{ Hz},$$

όπου η διαίρεση με 2 υποδηλώνει ότι η ισχύς μοιράζεται στις θετικές και στις αρνητικές του συχνότητες.

3. Θερμικός Θόρυβος
   - Λευκός Θόρυβος
   - Τυπική Διάταξη Δέκτη

Λευκός Θόρυβος

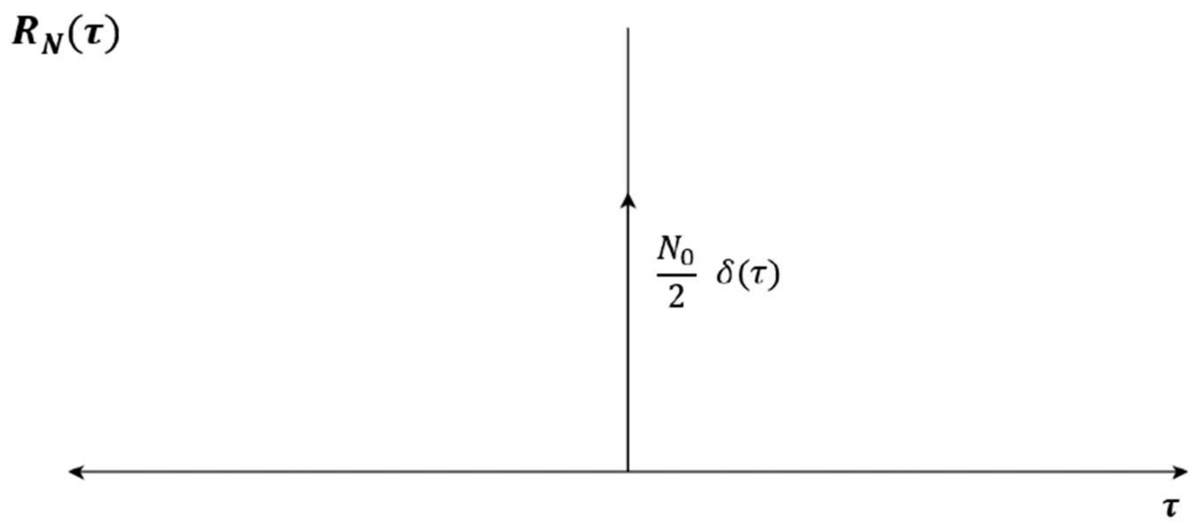
- Ο θόρυβος ο οποίος παρουσιάζει επίπεδο φάσμα σε όλες τις συχνότητες ονομάζεται λευκός θόρυβος (white noise).
- Η ΦΠΙ της ΤΔ λευκού θορύβου $N(t)$ είναι:

$$\mathcal{S}_N(f) = \frac{N_0}{2}, \; f \in (-\infty, \infty),$$

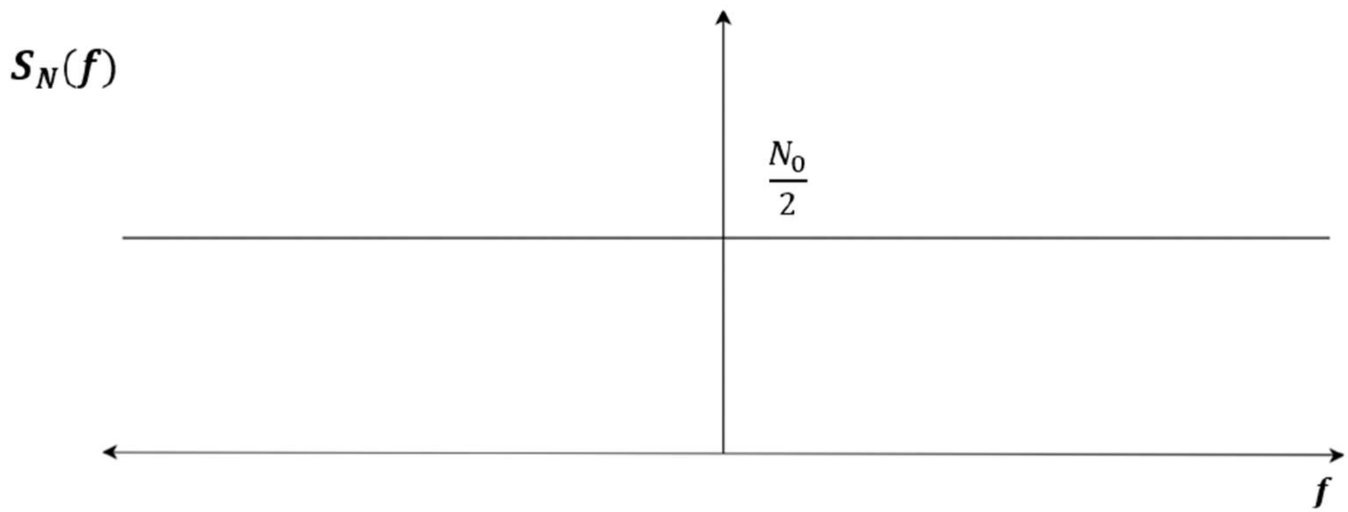
  όπου $N_0 \triangleq kT$.
- Για θερμοκρασία δωματίου $T = 290\; K$ προκύπτει ότι $N_0 = 10^{-21}\,\mathrm{Watts/Hz}$.
- Η ΣΑΣ του λευκού θορύβου είναι:

$$R_N(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{S}_N(f)\right] = \frac{N_0}{2}\delta(\tau).$$

ΣΑΣ Λευκού Θορύβου



ΦΠΙ Λευκού Θορύβου



Συνοπτικά περί του Θερμικού Θορύβου

- Πρόκειται για WSS ΤΔ.
- Έχει μηδενική μέση τιμή.
- Ακολουθεί την κατανομή Guass.
- Πρόκειται για λευκή ΤΔ με ΦΠΙ $\mathcal{S}_N(f) = \frac{N_0}{2}$ Watts/Hz.

Άσκηση 8

Άσκηση 8

Έστω η ΤΔ $N(t)$ λευκού θορύβου με ΦΠΙ
$\mathrm{S}_N(f) = \frac{N_0}{2}$, $f \in (-\infty, \infty)$, η οποία τροφοδοτεί το ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο $h(t)$ με απόκριση συχνότητας:

$$H(f) = \begin{cases} 1, & f_c - W/2 \leq |f| \leq f_c + W/2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}.$$

Αν η ΤΔ $Y(t)$ είναι η έξοδος του φίλτρου, να βρεθούν τα:
$\mathcal{S}_Y(f)$, $R_Y(\tau)$ και $\mathcal{P}_Y$.

Άσκηση 8

- Ισχύει ότι $\mathcal{S}_Y(f) = \mathcal{S}_N(f)|H(f)|^2$, οπότε:

$$\mathrm{S}_Y(f) = \frac{N_0}{2}, \quad f_c - W/2 \leq |f| \leq f_c + W/2.$$

- Η ΣΑΣ υπολογίζεται ως:

$$R_Y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{S}_Y(f)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{S}_Y(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

$$= \underbrace{\int_{f_c - W/2}^{f_c + W/2} \mathcal{S}_Y(f) e^{j2\pi f\tau} df}_{\triangleq I_1} + \underbrace{\int_{-f_c - W/2}^{-f_c + W/2} \mathcal{S}_Y(f) e^{j2\pi f\tau} df}_{\triangleq I_2}.$$

Άσκηση 8

$$I_1 = \int_{f_c-W/2}^{f_c+W/2} \mathcal{S}_Y(f) e^{j2\pi f\tau} df = \int_{f_c-W/2}^{f_c+W/2} \frac{N_0}{2} e^{j2\pi f\tau} df$$

$$= \frac{N_0}{2}\left[\frac{1}{j2\pi\tau} e^{j2\pi f\tau}\right]_{f_c-W/2}^{f_c+W/2} = \frac{N_0}{2}\frac{1}{\pi\tau}\left(\frac{e^{j2\pi(f_c+W/2)\tau} - e^{j2\pi(f_c-W/2)\tau}}{2j}\right)$$

$$= \frac{N_0}{2}\frac{e^{j2\pi f_c\tau}}{\pi\tau}\left(\frac{e^{j\pi W\tau} - e^{-j\pi W\tau}}{2j}\right) = e^{j2\pi f_c\tau}\frac{N_0}{2}\frac{1}{\pi\tau}\sin(\pi W\tau)$$

$$= e^{j2\pi f_c\tau}\frac{N_0}{2} W \frac{\sin(\pi W\tau)}{W\pi t} = e^{j2\pi f_c\tau}\frac{N_0}{2} W \,\mathrm{sinc}(W\tau)\,.$$

Άσκηση 8

- Ομοίως, υπολογίζεται ότι:

$$I_2 = \int_{-f_c-W/2}^{-f_c+W/2} \mathcal{S}_Y(f) e^{j2\pi f\tau}\, df = e^{-j2\pi f_c\tau} \frac{N_0}{2} W \operatorname{sinc}(W\tau).$$

- Άρα, η ΣΑΣ:

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= e^{j2\pi f_c\tau} \frac{N_0}{2} W \operatorname{sinc}(W\tau) + e^{-j2\pi f_c\tau} \frac{N_0}{2} W \operatorname{sinc}(W\tau) \\ &= N_0 W \cos(2\pi f_c\tau) \operatorname{sinc}(W\tau). \end{aligned}$$

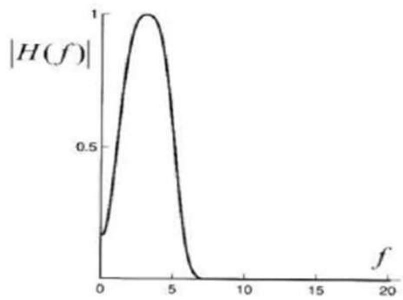
- Τέλος: $\mathcal{P}_Y = R_Y(0) = N_0 W$.

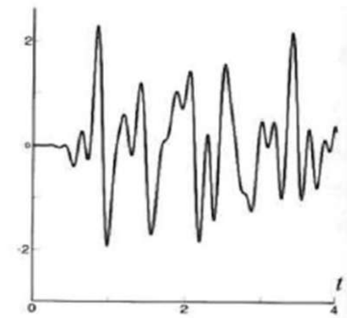
Παρατηρήσεις

- Η έξοδος του φίλτρου $Y(t)$ είναι μια WSS ΤΔ Gauss με μηδενική μέση τιμή και διακύμανση $\sigma_Y^2 = R_Y(0) = N_0 W$.
- Η ισχύς του θερμικού θορύβου αυξάνεται με το εύρος ζώνης του φίλτρου (για χαμηλοπερατό φίλτρο $f_c = 0$).

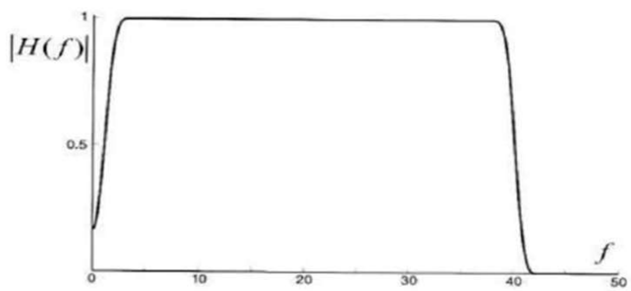
Το |H(f)| κι ένα $y_i(t)$

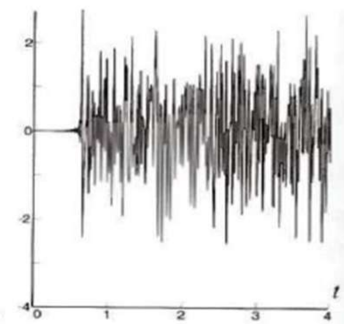
Φίλτρο μικρού εύρους ζώνης W





Φίλτρο μεγάλου εύρους ζώνης W





Τέλος μαθήματος

- Ερωτήσεις?