K21 - Συστήματα Επικοινωνιών

4ο Εξάμηνο
Τομέας Γ' / Τμήμα Πληροφορικής και Επικοινωνιών
ΕΚΠΑ 2024-2025
Ασκήσεις ΑΜ

Γιώργος Κανέλλος

Επίκουρος Καθηγητής
Τμήμα Πληροφορικής και Επικοινωνιών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
gtkanellos@di.uoa.gr

Άσκηση 1

Παράδειγμα 4.4
Αν το σήμα πληροφορίας είναι

$$m(t) = a \sin \frac{\pi}{4} t, \tag{4.21}$$

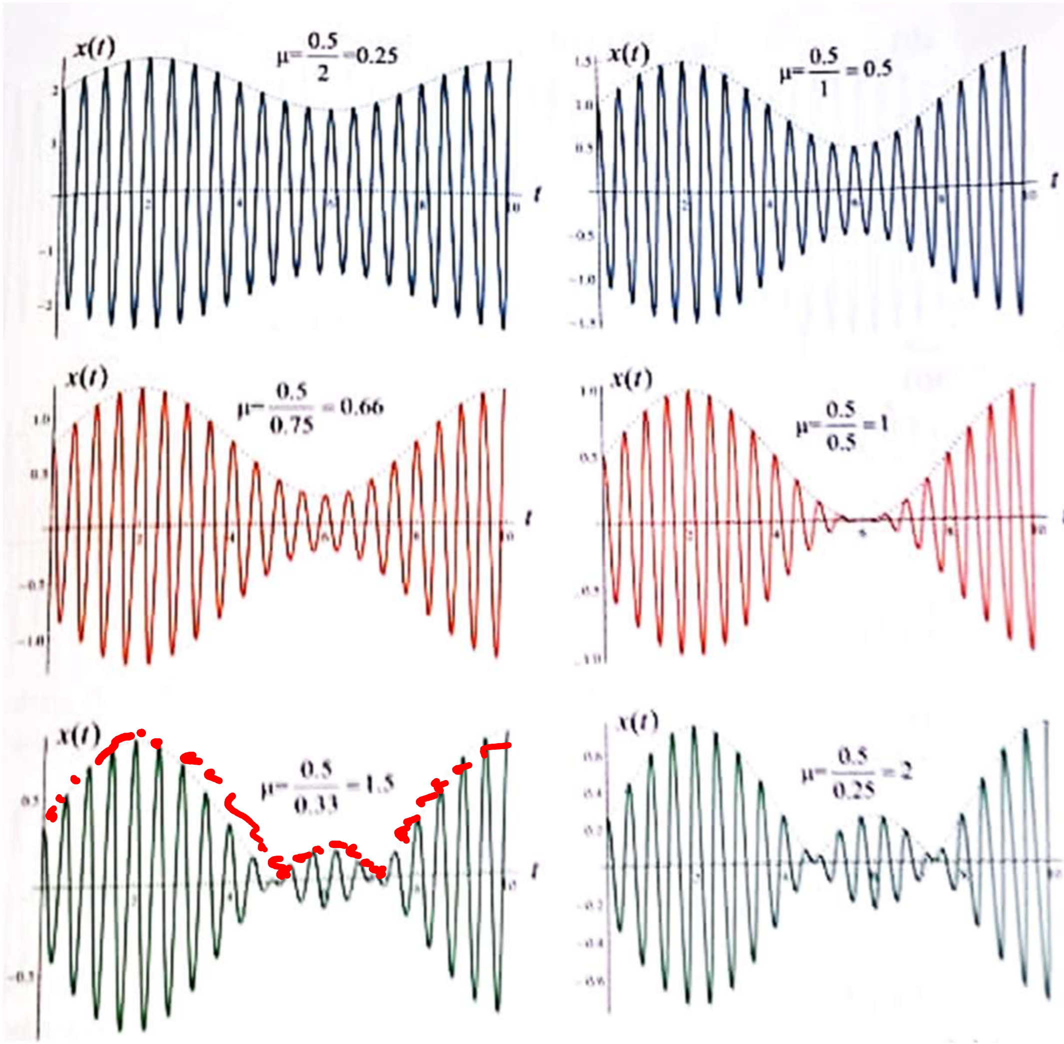
να σχεδιάσετε το διαμορφωμένο κατά AM σήμα στο πεδίο του χρόνου όταν το πλάτος του φέροντος A_c λαμβάνει τιμές από το σύνολο $\{2, 1, 0.75, 0.5, 0.33, 0.25\}$, η συχνότητα του φέροντος είναι $f_c = 2\,\text{Hz}$ και $a = 0.5$.
Επίσης να σχεδιάσετε τα σήματα AM που προκύπτουν αν το πλάτος του φέροντος είναι σταθερό $A_c = 2$ και μεταβάλλεται το πλάτος a του $m(t)$ λαμβάνοντας τιμές από το σύνολο: $\{0.5, 1, 1.33, 2, 3, 4\}$. Για όλες τις παραπάνω περιπτώσεις να υπολογίσετε το δείκτη διαμόρφωσης μ.

$$x(t) = \left(A_c + m(t)\right) \cos(2\pi f_c t)$$

$$\left(A_c + a \sin\left(\frac{\pi}{4} t\right)\right) \cos 4\pi t =$$

$$A_c \left(1 + \mu \sin\left(\frac{\pi}{4} t\right)\right) \cos 4\pi t$$

Άσκηση 1



x(t)
μ=0.5/2=0.25
x(t)
μ=0.5/1=0.5
x(t)
μ=0.5/0.75=0.66
x(t)
μ=0.5/0.5=1
x(t)
μ=0.5/0.33=1.5
x(t)
μ=0.5/0.25=2
t

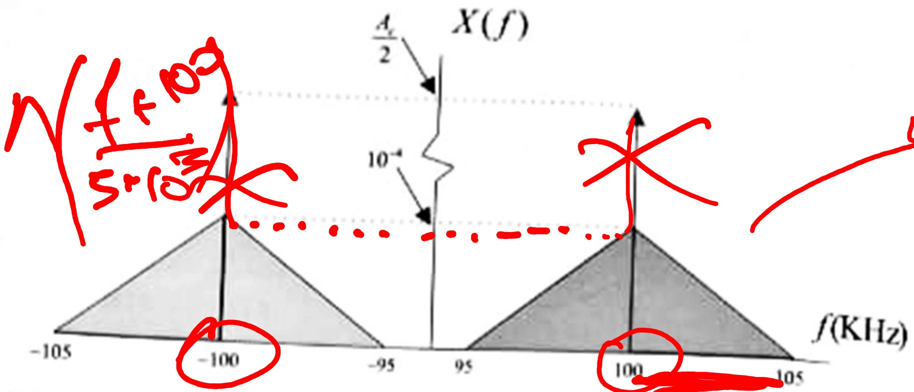
Άσκηση 2

$X(f) =$

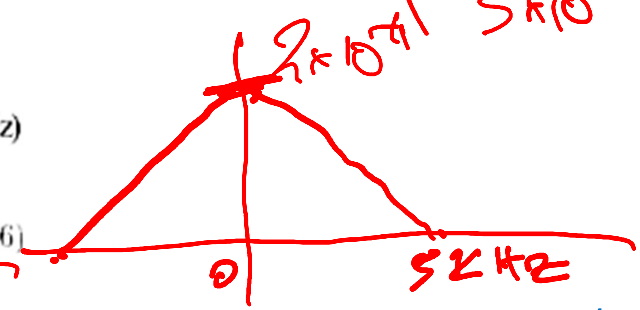
Παράδειγμα 4.6

Το φάσμα $X(f)$ ενός διαμορφωμένου κατά AM σήματος $x(t)$ φαίνεται στο Σχήμα 4.6. Η συχνότητα του φέροντος είναι $f_c = 100$ KHz και το πλάτος του $A_c = 1$. Δεδομένου ότι το σήμα πληροφορίας δεν περιέχει συναρτήσεις Δέλτα να βρεθεί και να σχεδιαστεί στο χρόνο το σήμα $x(t)$. Στη συνέχεια, αν με κάποιο τρόπο απομακρύνεται από το $x(t)$ η συνιστώσα που δε μεταφέρει πληροφορία αφήνοντας έναν όρο της μορφής $m(t)\cos 2\pi f_c t$, να βρεθεί η ενέργεια του σήματος που προκύπτει.

$M_2 = 10^{-4}\Lambda\left(\frac{f+100}{5\times10^3}\right)$



$M_1 = 10^{-4}\Lambda\left(\frac{f-\overset{f_c}{100}}{5\times10^3}\right)$



Σχήμα 4.6: Φάσμα Διαμορφωμένου Σήματος (Παράδειγμα 4.6)

$M(f) = 2\times10^{-4}\cdot\Lambda\left(\frac{f}{5\cdot10^3}\right)$

Άσκηση 2

$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1-\frac{\lvert t\rvert}{T}, & \lvert t\rvert \le T \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$	$T\operatorname{sinc}^2(fT)$
$x(\alpha t)$	$\frac{1}{\lvert\alpha\rvert} X\left(\frac{f}{\lvert\alpha\rvert}\right)$

$$M(f) = \frac{1}{5\cdot 10^3}\Lambda\left(\frac{f}{5\cdot 10^3}\right) = \frac{1}{T}\Lambda\left(\frac{f}{T}\right)$$

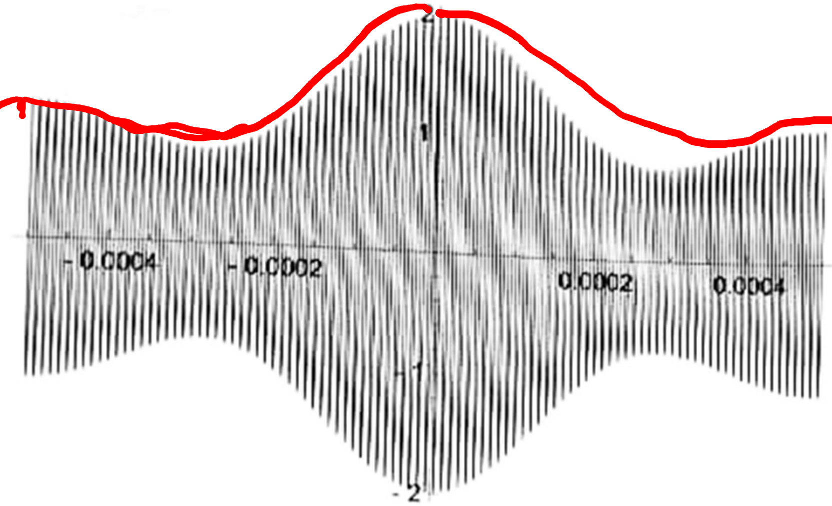
$$\to \frac{\cancel{T}\operatorname{sinc}^2(fT)}{\cancel{T}}$$

$$F(\Lambda(t)) = \operatorname{sinc}^2 f$$

$$F^{-1}(\Lambda(f)) = \operatorname{sinc}^2 t$$

$$\to F^{-1}\left(\Lambda\left(\frac{f}{T}\right)\right) = \operatorname{sinc}^2(T\cdot t) = \operatorname{sinc}^2(T\cdot t) = \operatorname{sinc}^2(5\cdot 10^3 t)$$

Άσκηση 2



Σχήμα 4.8: Διαμορφωμένο κατά AM σήμα στο πεδίο του χρόνου

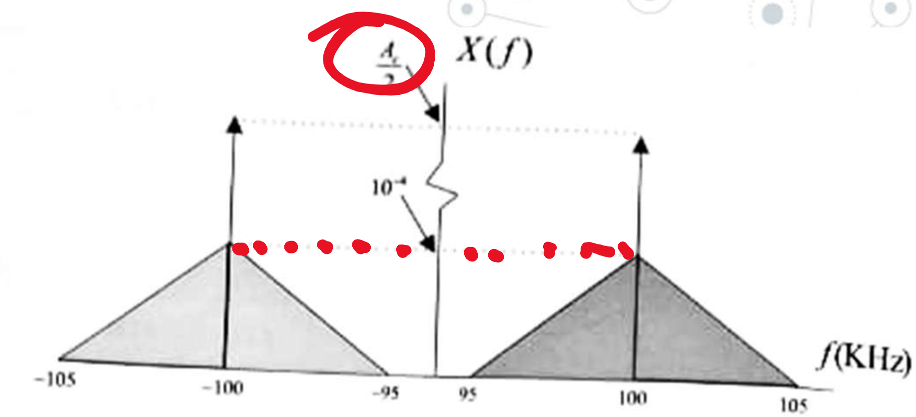
Σύμφωνα με το θεώρημα Parseval η ενέργεια του παραπάνω σήματος υπολογίζεται ως

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| 10^{-4} \left[\Lambda\left(\frac{f-f_c}{5\times 10^3}\right) + \Lambda\left(\frac{f+f_c}{5\times 10^3}\right)\right]\right|^2 df \\
&= 4\int_{f_c}^{f_c+5\times 10^3} 10^{-8}\left(1-\frac{f-f_c}{5\times 10^3}\right)^2 df = 66.667\mu\mathrm{J}.
\end{aligned} \tag{4.39}
$$

$X(f) =$

$\frac{1}{2}\Lambda\left(\frac{f-f_c}{5\cdot 10^3}\right) + \frac{1}{2}\Lambda\left(\frac{f+f_c}{5\cdot 10^3}\right)$

$+ \frac{A}{2}\delta(f-f_c) + \frac{A}{2}\delta(f+f_c)$



Σχήμα 4.6: Φάσμα Διαμορφωμένου Σήματος (Παράδειγμα 4.6)

$$\boxed{X'(f) = \frac{1}{2}\left(\Lambda\left(\frac{f-f_c}{5\cdot 10^3}\right) + \Lambda\left(\frac{f+f_c}{5\cdot 10^3}\right)\right)}$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |X'(f)|^2 \, df$$

Άσκηση 3

Παράδειγμα 4.7
Η διάταξη του Σχήματος 4.10 έχει ως στόχο την παραγωγή ενός συμβατικού AM σήματος $z(t)$, με σήμα πληροφορίας

$$m(t) = \text{sinc}\,(2Wt)\cos\,(2\pi Wt)\,. \tag{4.44}$$

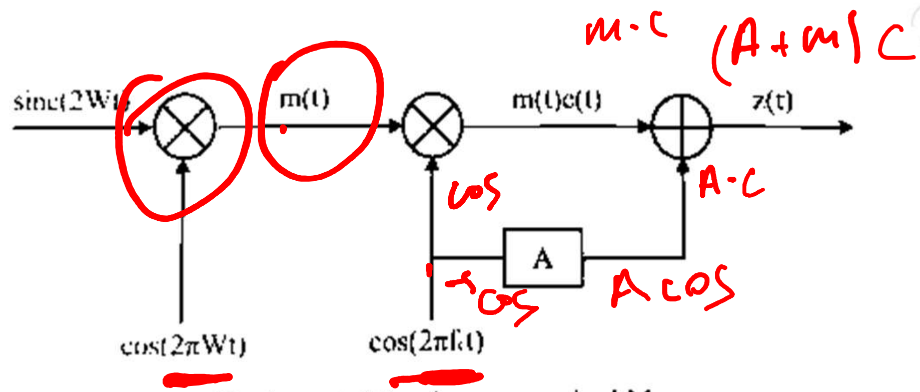
Δίνεται ότι $f_c = 10W$ και $\min\,(\text{sinc}t) \approx -0.2$.

i. Να αποδειχθεί στο πεδίο της συχνότητας ότι $m(t) = \text{sinc}\,(4Wt)$.

ii. Υπάρχουν διαθέσιμοι α) ένας ιδανικός μείκτης και β) ένας μείκτης που α ποτελείται από έναν αθροιστή, ένα μη γραμμικό στοιχείο με χαρακτηριστικ εισόδου - εξόδου $y(t) = \frac{1}{2}x^2(t)$ και ένα φίλτρο (Σχήμα 4.11). Όπως φαίνετα στο σχήμα 4.10, ο ένας μείκτης θα χρησιμοποιηθεί για την παραγωγή το σήματος πληροφορίας $m(t)$, και ο άλλος για τη διαμόρφωση του σήματος Γιατί ο μείκτης μη γραμμικού στοιχείου δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί γι την παραγωγή του σήματος $m(t)$;

iii. Να υπολογιστεί το φάσμα της εξόδου του μη γραμμικού στοιχείου στο δεύτε ρο μείκτη και να σχεδιαστεί το διάγραμμα πλάτους του. Τι φίλτρο πρέπει ν χρησιμοποιηθεί μετά το μη γραμμικό στοιχείο; Να δοθούν τα χαρακτηριστικ του συναρτήσει του W.

iv. Να υπολογιστεί ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας A έτσι ώστε ο δείκτη διαμόρφωσης του σήματος $z(t)$ να είναι $\mu = 0.5$.



Σχήμα 4.10: Διαμορφωτής AM

Άσκηση 3

$m(t) = \text{sinc}(4wt)$

$x(\alpha t)$	$\frac{1}{\lvert\alpha\rvert}X\left(\frac{f}{\lvert\alpha\rvert}\right)$

$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert \le T/2 \\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$	$T\text{sinc}(fT)$

$$m(t) = \text{sinc}(2wt)\cdot\cos(2\pi wt)$$

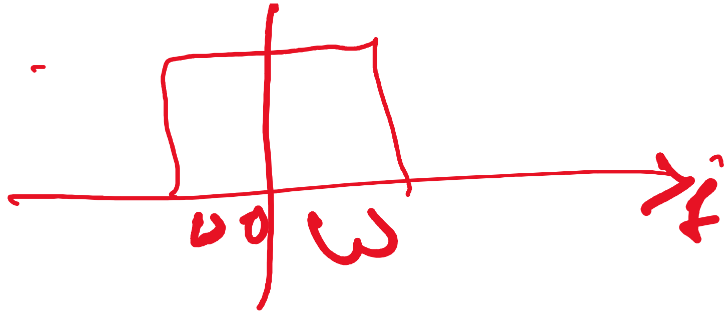
$$F(m(t)) = F(\text{sinc}(2wt)\cdot\cos(2\pi wt)) =$$

$$F(\text{sinc}(2wt)) * F(\cos(2\pi wt)) =$$

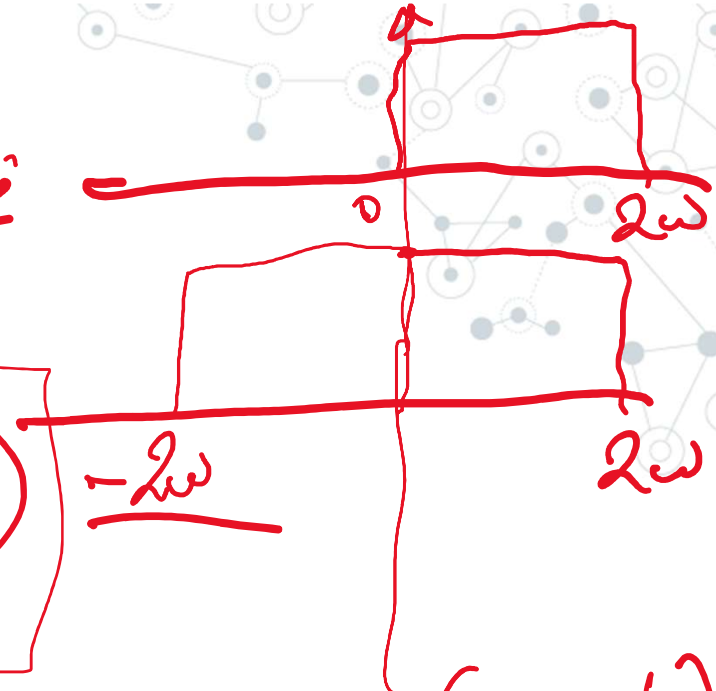
$$\frac{1}{2w}\Pi\left(\frac{f}{2w}\right) * \left(\frac{1}{2}\delta(f-w) + \frac{1}{2}\delta(f+w)\right) =$$

$$\frac{1}{4w}\Pi\left(\frac{f-w}{2w}\right) + \frac{1}{4w}\Pi\left(\frac{f+w}{2w}\right)$$

$$\frac{1}{4W}\Pi\left(\frac{f-W}{2W}\right)+$$



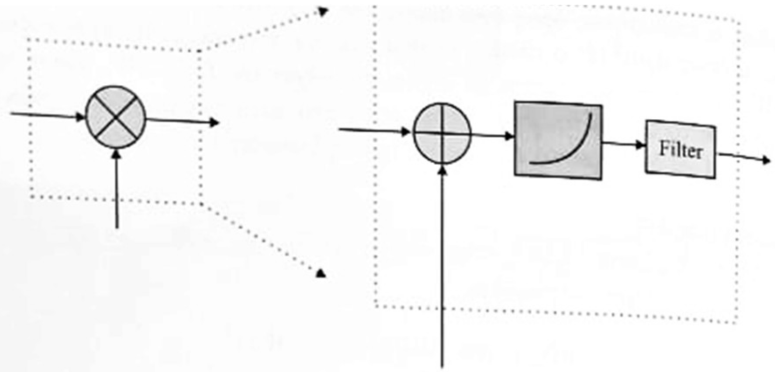
$$\frac{1}{4W}\Pi\left(\frac{f+W}{2W}\right)$$



$$\boxed{\frac{1}{4W}\Pi\left(\frac{f}{4W}\right)}$$

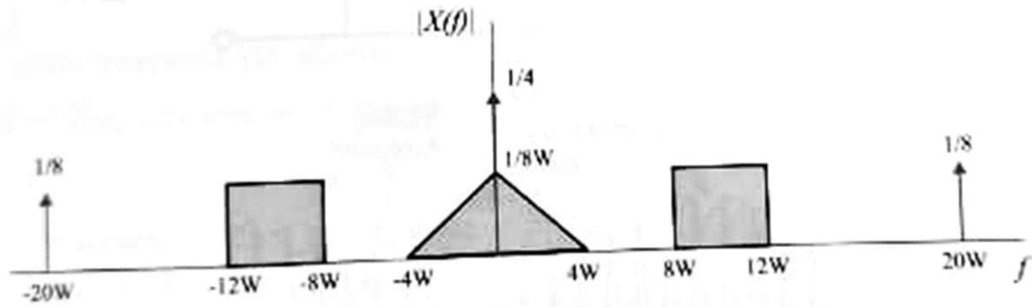
$$F^{-1}\left(\frac{1}{|a|}\Pi\left(\frac{f}{|a|}\right)\right)=\mathrm{sinc}(at)=\mathrm{sinc}(4Wt)$$

Άσκηση 3

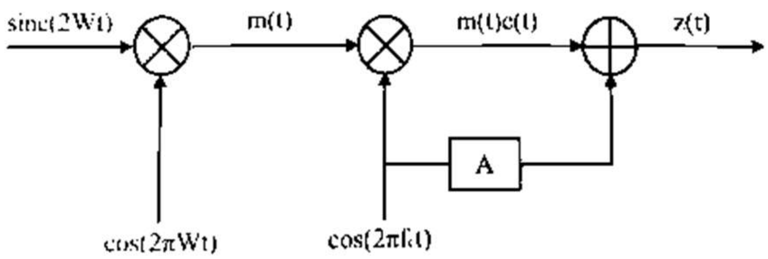


Σχήμα 4.11: Μείκτης μη γραμμικού στοιχείου

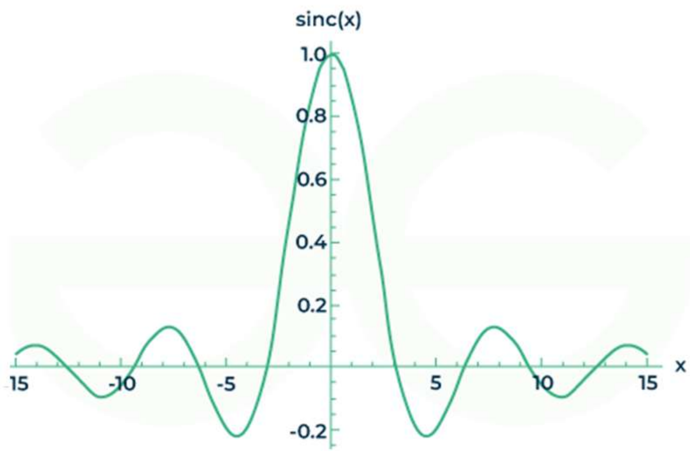
Άσκηση 3



Άσκηση 3



Σχήμα 4.10: Διαμορφωτής AM



Άσκηση 4

Παράδειγμα 4.13

Σε πολλές τηλεπικοινωνιακές εφαρμογές είναι απαραίτητη η μετατροπή της συχνότητας του διαμορφωμένου σήματος από f_1 σε f_2. Να περιγράψετε πώς μπορεί να υλοποιηθεί η μετατροπή αυτή σε σήματα DSB-AM-SC.

Άσκηση 5

Παράδειγμα 4.14

Αν το σήμα πληροφορίας είναι άθροισμα δύο ημιτονοειδών σημάτων-τόνων

$$m(t) = \cos 2\pi f_1 t + \cos 2\pi f_2 t, \tag{4.92}$$

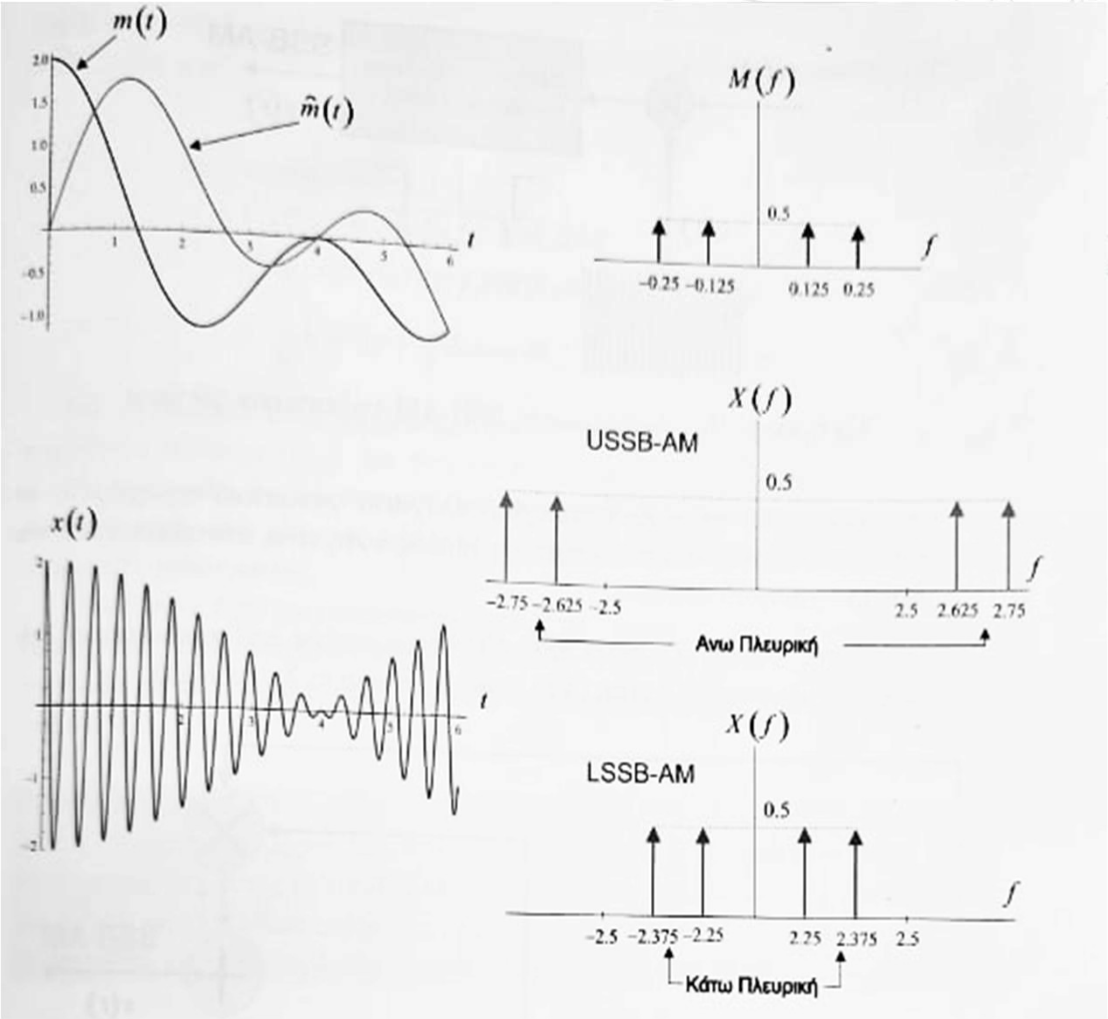
να εκφραστεί μαθηματικά και να σχεδιαστεί το διαμορφωμένο σήμα SSB-AM στα πεδία του χρόνου και της συχνότητας για τιμές των f_1, f_2, f_c και A_c της αρεσκείας σας.

$\cos(t)$	$\sin(t)$

Άσκηση 5

$\cos(x \pm y)$	$\cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$
$\sin(x \pm y)$	$\sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$

Άσκηση 5



m(t)
m̂(t)
M(f)
0.5
−0.25 −0.125
0.125 0.25
X(f)
USSB-AM
0.5
−2.75 −2.625 −2.5
2.5 2.625 2.75
Ανω Πλευρική
x(t)
X(f)
LSSB-AM
0.5
−2.5 −2.375 −2.25
2.25 2.375 2.5
Κάτω Πλευρική

Άσκηση 6

Άσκηση 4.1

Δίνεται ένα σήμα πληροφορίας

$$m(t) = a \sin 2\pi f_0 t + b \cos 2\pi 2 f_0 t, \quad a, b > 0, \qquad (4.237)$$

το οποίο διαμορφώνεται κατά AM από φέρον συχνότητας f_c και πλάτους $A_c = 3$, ενώ ο συντελεστής αποδοτικότητας ισχύος είναι $\eta = 0.15094$. Ακόμη, ο λόγος ισχύος των δύο συνιστωσών του σήματος πληροφορίας είναι

$$\frac{P_{m,f_0}}{P_{m,2f_0}} = 4. \qquad (4.238)$$

i. Να υπολογιστεί ο δείκτης διαμόρφωσης μ του διαμορφωμένου σήματος AM. Μπορεί το σήμα να αποδιαμορφωθεί με ανιχνευτή περιβάλλουσας;

ii. Να υπολογιστεί αναλυτικά το φάσμα του διαμορφωμένου σήματος και να σχεδιαστούν τα διαγράμματα πλάτους και φάσης για $f_0 = 50$ KHz και $f_c = 1$ MHz.

Άσκηση 6

Αρχικά υπολογίζεται η ισχύς του σήματος πληροφορίας ως εξής

$$\begin{aligned} P_m &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |m(t)|^2\,dt \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} (a\sin 2\pi f_0 t + b\cos 2\pi 2 f_0 t)^2\,dt \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\left(\int_{-T}^{T} a^2\sin^2 2\pi f_0 t\,dt + \int_{-T}^{T} b^2\cos^2 2\pi 2 f_0 t\,dt\right) \\ &= \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \end{aligned} \tag{4.239}$$

όπου το ολοκλήρωμα του όρου του διπλάσιου γινομένου μηδενίζεται, καθώς οι δύο τόνοι είναι ορθογώνια σήματα. Επομένως ισχύει

$$\frac{P_{m,f_0}}{P_{m,2f_0}} = \frac{a^2}{b^2} = 4 \to a = 2b. \tag{4.240}$$

Ακόμη ο συντελεστής αποδοτικότητας ισχύος είναι

$$\eta = \frac{P_m}{A_c^2 + P_m} = \frac{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2}{3^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2} = 0.15094 \tag{4.241}$$

$$\to a = 1.6,\ b = 0.8.$$

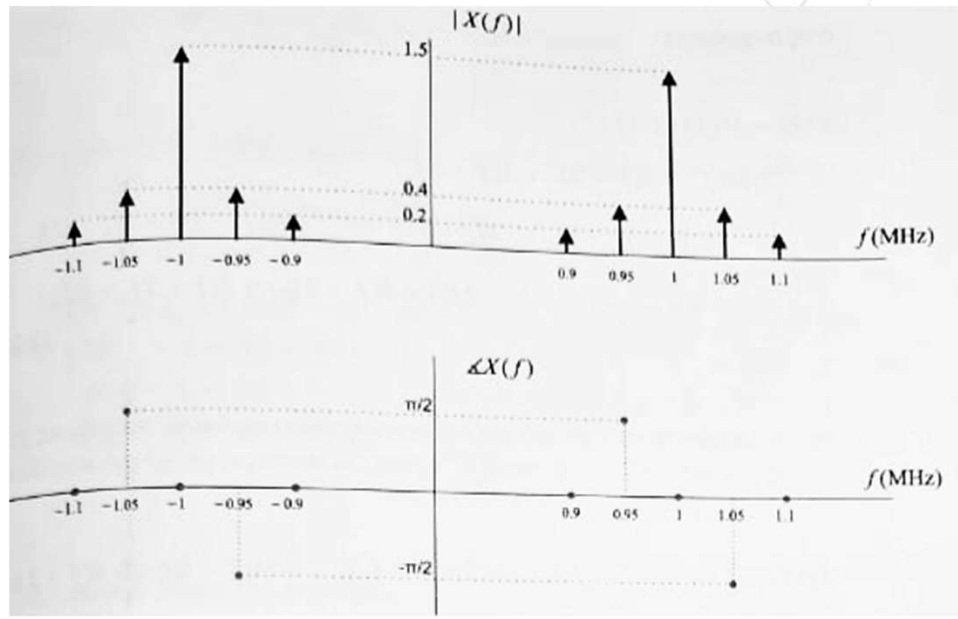
Άσκηση 6

$$
\begin{aligned}
m(t) &= [A_c + m(t)]\cos 2\pi f_c t \\
&= A_c \cos 2\pi f_c t + a \sin 2\pi f_0 t \cos 2\pi f_c t + b \cos 2\pi 2 f_0 t \cos 2\pi f_c t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X(f) = &\frac{A_c}{2}[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] \\
&+ \frac{a}{4j}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)] \star [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] \\
&+ \frac{b}{4}[\delta(f - 2f_0) + \delta(f + 2f_0)] \star [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)]
\end{aligned}
$$

Άσκηση 6

$$
\begin{aligned}
X(f) = \frac{A_c}{2}&\left[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)\right]\\
&+ e^{j\frac{\pi}{2}}\frac{a}{4}\left[\delta(f-f_c+f_0)+\delta(f+f_c+f_0)\right]\\
&+ e^{-j\frac{\pi}{2}}\frac{a}{4}\left[\delta(f-f_c-f_0)+\delta(f+f_c-f_0)\right]\\
&+ \frac{b}{4}\left[\delta(f-f_c-2f_0)+\delta(f-f_c+2f_0)\right.\\
&\qquad \left.+\delta(f+f_c-2f_0)+\delta(f+f_c+2f_0)\right].
\end{aligned}
$$



Τέλος μαθήματος

- Ερωτήσεις?