



# Κ21 - Συστήματα Επικοινωνιών

4<sup>ο</sup> Εξάμηνο

Τομέας Γ' / Τμήμα Πληροφορικής και Επικοινωνιών  
ΕΚΠΑ 2024-2025

Διαμόρφωση FM/PM

Γιώργος Κανέλλος



Επίκουρος Καθηγητής  
Τμήμα Πληροφορικής και Επικοινωνιών  
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών  
[gkanellos@di.uoa.gr](mailto:gkanellos@di.uoa.gr)

# Συστήματα Επικοινωνιών

- 1 Διαμορφώσεις Φάσης και Συχνότητας
- 2 Φάσμα Διαμόρφωσης Γωνίας
- 3 Διαμόρφωση κι Αποδιαμόρφωση FM





**ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΗ**  
**ΝΕΑ ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ**  
**17/06/2025 15:00-17:00**



## Διαμόρφωση Γωνίας

- Για το σήμα πληροφορίας  $m(t)$ , το διαμορφωμένο κατά AM σήμα προκύπτει ως (με φέρον  $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$ ):

$$x(t) = (A_c + m(t)) \cos(2\pi f_c t).$$

- Πέραν του πλάτους, το σήμα  $m(t)$  δύναται να ενσωματωθεί στη συχνότητα ή τη φάση του  $x(t)$  διατηρώντας το πλάτος του σταθερό.
- Η διαμόρφωση αυτή ονομάζεται *διαμόρφωση φάσης (PM: Phase Modulation)* ή *διαμόρφωση συχνότητας (FM: Frequency Modulation)*.
- Ένα διαμορφωμένο κατά PM ή FM σήμα ορίζεται ως:

$$x(t) = A_c \cos(\theta(t)), \quad \theta(t) \triangleq 2\pi f_c t + \phi(t), \quad \phi(t) \triangleq f(m(t)).$$



## Διαμόρφωση Γωνίας και Πλάτους

- Η διαμόρφωση γωνίας υπερτερεί της διαμόρφωσης AM στην ποιότητα του σήματος πληροφορίας καθώς επηρεάζεται λιγότερο από πηγές θορύβου.
- Δηλαδή, για δεδομένη ισχύ εκπομπής, η διαμόρφωση γωνίας επιτυγχάνει καλύτερη ποιότητα μετάδοσης. Ισοδύναμα, για δεδομένη απαίτηση ποιότητας μετάδοσης, η διαμόρφωση γωνίας χρειάζεται μικρότερη ισχύ εκπομπής.
- Ο θόρυβος επηρεάζει άμεσα το πλάτος του λαμβανόμενου σήματος ενώ η επίδραση στη φάση είναι λιγότερο σημαντική.
- Όμως, η διαμόρφωση γωνίας απαιτεί πιο ακριβά και πολύπλοκα συστήματα.



## Στιγμιαία Συχνότητα

- Η *στιγμιαία συχνότητα* (*instantaneous frequency*) του  $x(t)$  ορίζεται ως εξής:

$$f_i(t) \triangleq \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta(t)}{dt} = f_c + \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt}.$$

- Η έννοια αυτή δεν πρέπει να συγχέεται με τη συχνότητα όπως έχει αυτή έχει οριστεί μέσω του φάσματος. Οι συχνότητες που καταλαμβάνει ένα σήμα υπολογίζονται (μετασχηματισμός Fourier) για ολόκληρο το χρονικό του διάστημα.
- Η στιγμιαία συχνότητα ορίζεται για συγκεκριμένη χρονική στιγμή όπως αντίστοιχα ορίζεται η στιγμιαία ταχύτητα στη Μηχανική.

## Διαμόρφωση Φάσης - PM

- Στη διαμόρφωση PM το  $\phi(t)$  σχετίζεται γραμμικά με το  $m(t)$  μέσω μίας σταθεράς  $K_p$  που ονομάζεται *ευαισθησία φάσης (phase sensitivity)* της διαμόρφωσης με μονάδα μέτρησης το radians/Volt:

$$\boxed{\phi(t) = K_p m(t).} \quad \text{MCF} = \sin(\phi(t))$$

- Ο δείκτης διαμόρφωσης  $\beta_p$  εκφράζει τη μέγιστη μετατόπιση της φάσης στο διαμορφωμένο σήμα  $x(t)$ :

$$\beta_p \triangleq \Delta\phi_{max} = K_p \max |m(t)|.$$

## Διαμόρφωση FM (1/2)

- Στη διαμόρφωση FM ο ρυθμός μεταβολής της φάσης (ως προς το χρόνο) μεταβάλλεται γραμμικά με το  $m(t)$  μέσω μιας σταθεράς  $K_f$  που ονομάζεται *ευαισθησία συχνότητας (frequency sensitivity)* της διαμόρφωσης με μονάδα μέτρησης το Hz/Volt:

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = 2\pi K_f m(t).$$

- Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της στιγμιαίας συχνότητας προκύπτει ότι (γραμμική μεταβολή ως προς το  $m(t)$ ):

$$f_i(t) = f_c + K_f m(t).$$

- Από τον ορισμό του ρυθμού μεταβολής της φάσης προκύπτει ότι:

$$\phi(t) = 2\pi K_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau.$$

## Διαμόρφωση FM (2/2)

- Αν  $W$  είναι το εύρος ζώνης του  $m(t)$ , ο δείκτης διαμόρφωσης  $\beta_f$  εκφράζει τη μέγιστη μεταβολή της στιγμιαίας συχνότητας από την κεντρική συχνότητα  $f_c$ , κανονικοποιημένη ως προς το  $W$ :

$$\beta_f \triangleq \frac{\Delta f_{max}}{W} = \frac{K_f \max |m(t)|}{W}.$$



## Διαμορφώσεις PM και FM (1/2)

$$FM = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi(t))$$

- Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα:

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta)} = \underbrace{\cos(\alpha)}_{\text{αφαιρ}} \underbrace{\cos(\beta)}_{\text{αφαιρ}} - \sin(\alpha) \sin(\beta),$$

το διαμορφωμένο κατά γωνία σήμα προκύπτει ως:

$$x(t) \triangleq \underbrace{A_c \cos(\phi(t))}_{=x_I(t)} \cos(2\pi f_c t) - \underbrace{A_c \sin(\phi(t))}_{=x_Q(t)} \sin(2\pi f_c t).$$

- Ανάλογα με το είδος της διαμόρφωσης:

$$\phi(t) = \begin{cases} K_p m(t), & \text{PM} \\ 2\pi K_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau, & \text{FM} \end{cases}$$

## Διαμορφώσεις PM και FM (2/2)

- Τα ορθογώνια φέροντα  $\cos(2\pi f_c t)$  και  $\sin(2\pi f_c t)$  διαμορφώνονται κατά πλάτος από τις μη γραμμικές συνιστώσες  $\cos(\phi(t))$  και  $\sin(\phi(t))$  του  $m(t)$ .
- Από τις  $x_I(t) = A_c \cos(\phi(t))$  και  $x_Q(t) = A_c \sin(\phi(t))$  προκύπτει ότι:
  - $V(t) = \sqrt{x_I^2(t) + x_Q^2(t)} = A_c$  (δεν εμπεριέχεται το  $m(t)$ ).
  - $\tan^{-1} \left( \frac{x_Q(t)}{x_I(t)} \right) = \tan^{-1} (\tan(\phi(t))) = \phi(t)$  (ισχύει  $\phi(t) = f(m(t))$ ).
- Η ισχύς του διαμορφωμένου κατά PM/FM σήματος  $x(t)$ :

$$\mathcal{P}_x^{\text{PM}} = \mathcal{P}_x^{\text{FM}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |A_c \cos(2\pi f_c t + \phi(t))|^2 dt = \frac{A_c^2}{2}.$$

## Δυσκότητα στις Διαμορφώσεις PM και FM

- Αν σε διαμορφωτή PM εισαχθεί το χρονικό ολοκλήρωμα του  $m(t)$ , τότε προκύπτει το διαμορφωμένο σήμα:

$$x(t) = A_c \cos \left( 2\pi f_c t + K_p \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \right).$$

- Για  $K_p = 2\pi K_f$  προκύπτει η διαμόρφωση FM:

$$x(t) = A_c \cos \left( 2\pi f_c t + 2\pi K_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \right).$$

## Δυσκότητα στις Διαμορφώσεις PM και FM

- Αντιστρόφως, αν σε διαμορφωτή FM εισαχθεί η χρονική παράγωγος του  $m(t)$ , τότε προκύπτει το διαμορφωμένο σήμα:

$$x(t) = A_c \cos \left( 2\pi f_c t + 2\pi K_f \int_{-\infty}^t \frac{dm(\tau)}{d\tau} d\tau \right).$$

- Για  $K_f = \frac{K_p}{2\pi}$  προκύπτει η διαμόρφωση FM:  $\hat{\phi}(t)$

$$x(t) = A_c \cos (2\pi f_c t + K_p m(t)).$$

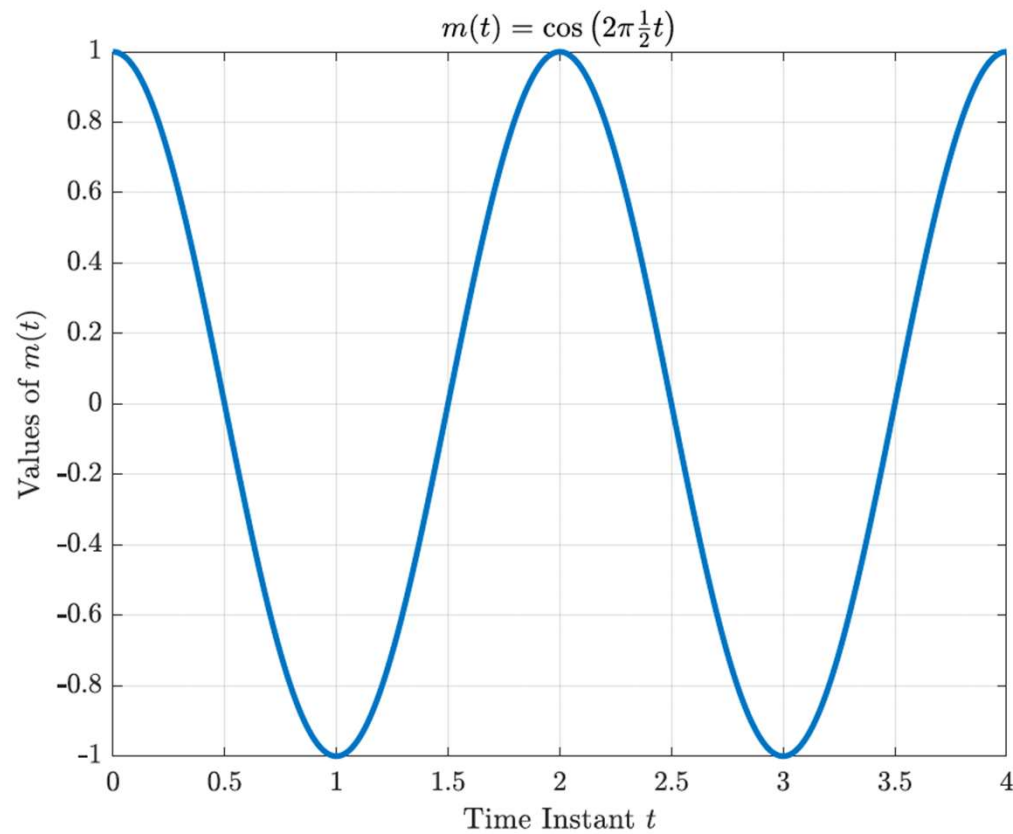
## Άσκηση 1

Έστω το σήμα πληροφορίας βασικής ζώνης

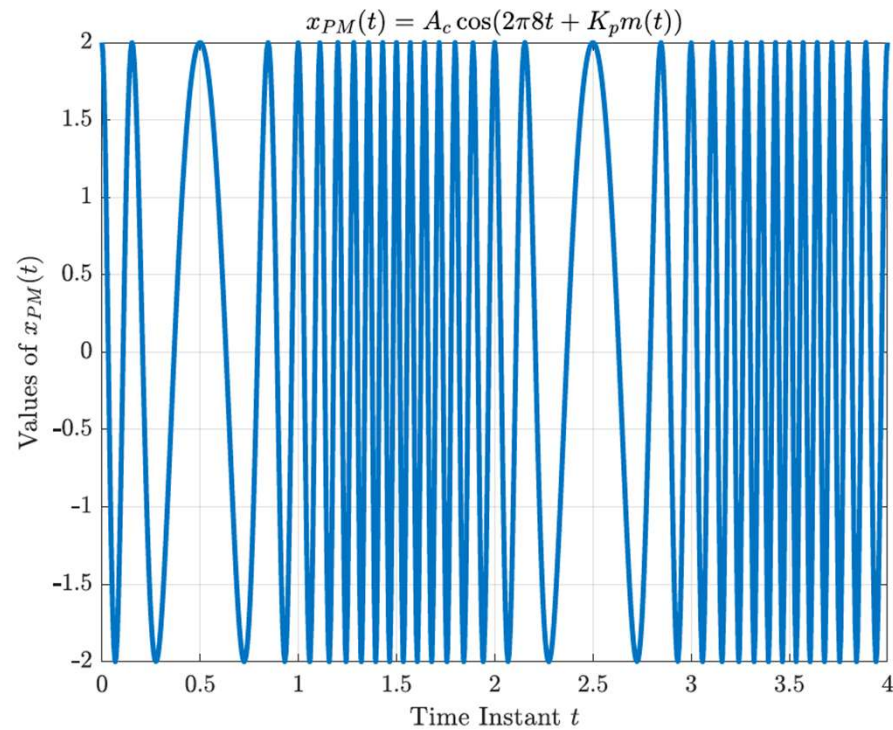
$$m(t) = \alpha \cos(2\pi f_m t).$$

Να προσδιοριστούν στο πεδίο του χρόνου τα διαμορφωμένα κατά PM και FM σήματα για φέρον της αρεσκειάς σας.

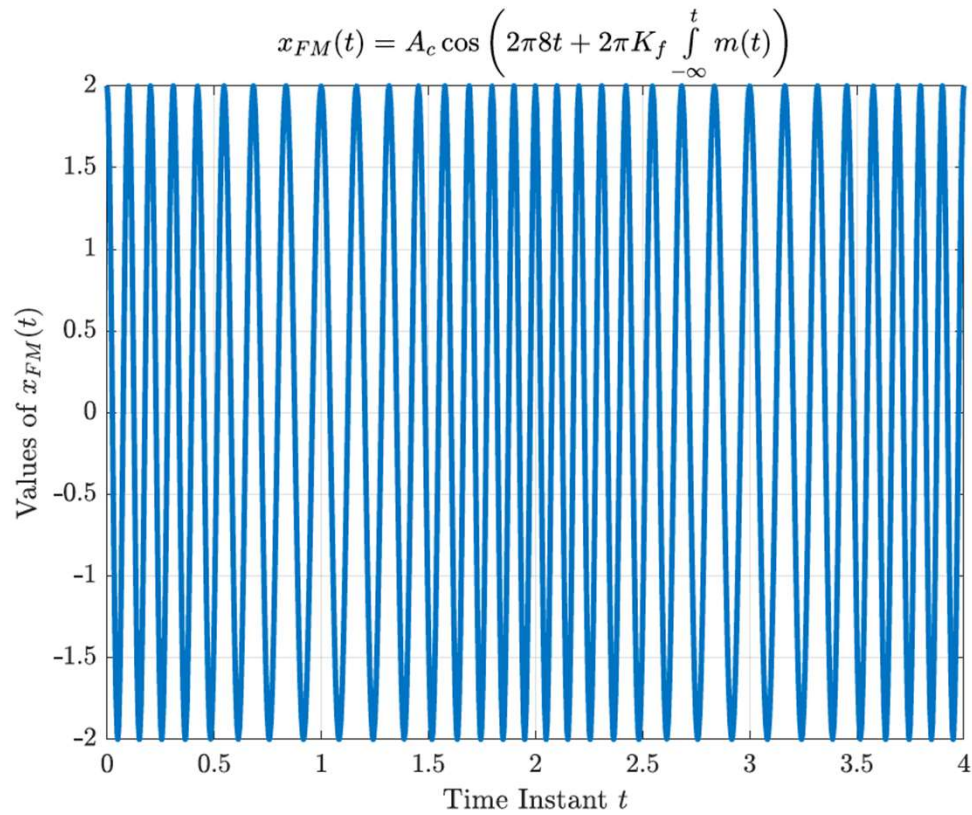
## Το Σήμα Πληροφορίας $m(t) = \cos(2\pi \frac{1}{2}t)$



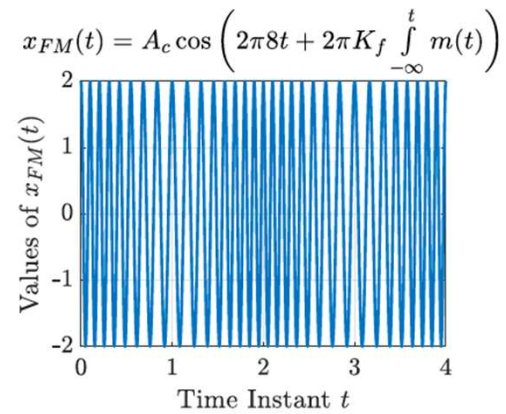
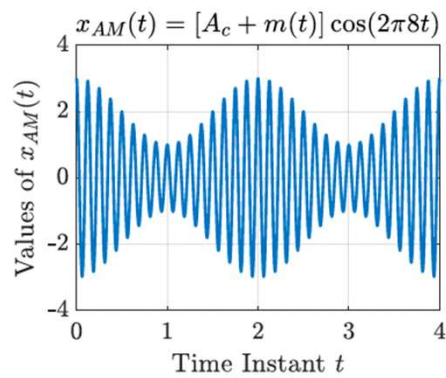
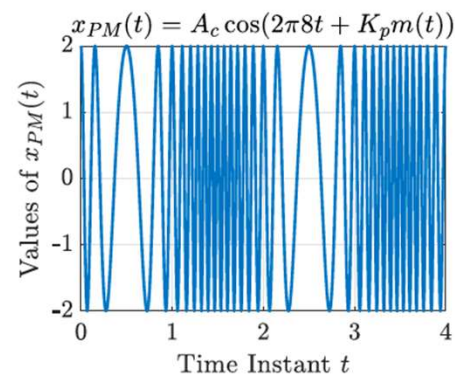
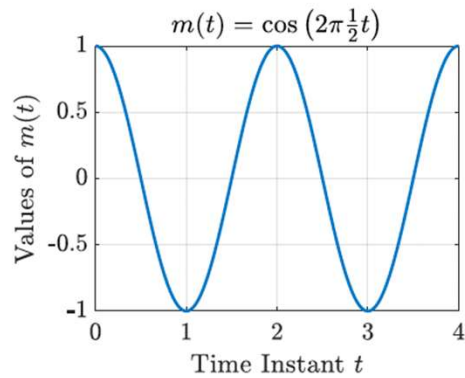
## Διαμόρφωση PM



## Διαμόρφωση FM



## Διαμορφώσεις AM, PM και FM





- 1 Διαμορφώσεις Φάσης και Συχνότητας
- 2 Φάσμα Διαμόρφωσης Γωνίας
- 3 Διαμόρφωση κι Αποδιαμόρφωση FM



## Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

- Υπενθυμίζονται οι μετασχηματισμοί Fourier:

$$\mathcal{F} \{ \cos(2\pi f_c t) \} = \frac{1}{2} (\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)),$$

$$\mathcal{F} \{ \sin(2\pi f_c t) \} = \frac{1}{2j} (\delta(f - f_c) - \delta(f + f_c)).$$

- Επίσης, για τη συνάρτηση  $\delta(t)$  ισχύει:

$$f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0).$$



## Μετασχηματισμός Fourier του $x(t)$ (1/2)

- Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω προκύπτει:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x(t)\} &= \mathcal{F}\{A_c \cos(2\pi f_c t) \cos(\phi(t))\} - \mathcal{F}\{A_c \sin(2\pi f_c t) \sin(\phi(t))\} \\ &= \frac{1}{2} A_c \mathcal{F}\{\cos(\phi(t))\} * \delta(f - f_c) \\ &\quad + \frac{1}{2} A_c \mathcal{F}\{\cos(\phi(t))\} * \delta(f + f_c) \\ &\quad + \frac{1}{2j} A_c \mathcal{F}\{\sin(\phi(t))\} * \delta(f + f_c) \\ &\quad - \frac{1}{2j} A_c \mathcal{F}\{\sin(\phi(t))\} * \delta(f - f_c).\end{aligned}$$

- Αν  $\kappa(f) \triangleq \mathcal{F}\{\cos(\phi(t))\}$ , τότε  $\mathcal{F}\{\cos(\phi(t))\} * \delta(f - f_c) = \kappa(f - f_c)$ .  
Ομοίως και για τα υπόλοιπα.

- Δεν υπάρχουν κλειστής μορφής εκφράσεις για τα  $\mathcal{F}\{\cos(\phi(t))\}$  και  $\mathcal{F}\{\sin(\phi(t))\}$ .

## Προσέγγιση με Σειρά Taylor

- Τα πολυώνυμα, η εκθετική συνάρτηση κι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις (ημίτονο και συνημίτονο) ονομάζονται *ακέραιες αναλυτικές συναρτήσεις*.
- Π.χ. οι παρακάτω ισότητες ισχύουν για κάθε  $x$  (ανάπτυξη γύρω από το σημείο  $x_0 = 0$ ):

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

- Για μη ακέραιες αναλυτικές συναρτήσεις (π.χ. λογάριθμο κι εφαπτομένη) οι αντίστοιχες σειρές Taylor δε συγκλίνουν αν το  $x$  απέχει από το  $x_0$ .



## Μετασχηματισμός Fourier του $x(t)$ (2/2)

- Προκύπτουν εύκολα τα αναπτύγματα σε σειρές Taylor (γύρω από το σημείο  $\phi(t) = 0$ ):

$$\cos(\phi(t)) = 1 - \frac{\phi^2(t)}{2!} + \frac{\phi^4(t)}{4!} - \dots$$

$$\sin(\phi(t)) = \phi(t) - \frac{\phi^3(t)}{3!} + \frac{\phi^5(t)}{5!} - \dots$$

- Επομένως, το διαμορφωμένο σήμα  $x(t)$  γράφεται:

$$\begin{aligned} x(t) = & A_c \cos(2\pi f_c t) - A_c \frac{\phi^2(t)}{2!} \cos(2\pi f_c t) + \dots \\ & - A_c \phi(t) \sin(2\pi f_c t) + A_c \frac{\phi^3(t)}{3!} \sin(2\pi f_c t) - \dots \end{aligned}$$



## Φασματικό Περιεχόμενο του $x(t)$ (1/2)

- Υπενθυμίζεται η ακόλουθη ιδιότητα (με  $\Phi(f) \triangleq \mathcal{F}\{\phi(t)\}$ ):

$$\mathcal{F}\{\phi^n(t)\} = \underbrace{\Phi(f) * \Phi(f) * \dots * \Phi(f)}_{n \text{ φορές}}$$

- Μάλιστα, η πράξη της συνέλιξης σημάτων οδηγεί σε σήμα με εύρος ζώνης το άθροισμα των ευρών ζώνης των συνελισσόμενων σημάτων.
- Αν  $W$  είναι το εύρος ζώνης του  $m(t)$ , το εύρος ζώνης του  $\phi(t)$  είναι επίσης  $W$ . Τότε, το εύρος ζώνης του  $\phi^n(t)$  (με φάσμα  $\mathcal{F}\{\phi^n(t)\}$ ) είναι  $nW$ .



## Φασματικό Περιεχόμενο του $x(t)$ (2/2)

- Είναι εμφανές από την ανάπτυξη σε σειρά Taylor του  $x(t)$  ότι περιέχει δυνάμεις του  $\phi^n(t)$  με  $n \rightarrow \infty$ . Συνεπώς, το φασματικό του περιεχόμενο εκτείνεται από  $-\infty$  έως  $+\infty$ .
- Τα πλάτη όμως των επιμέρους φασμάτων των  $\phi^n(t)$  εξασθενούν όσο αυξάνεται το  $n$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x(t)\} &= \frac{A_c}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \mathcal{F}\{\phi^{2n}(t)\} * \delta(f - f_c) \\ &+ \frac{A_c}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \mathcal{F}\{\phi^{2n}(t)\} * \delta(f + f_c) \\ &+ \frac{A_c}{2j} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \mathcal{F}\{\phi^{2n+1}(t)\} * \delta(f + f_c) \\ &- \frac{A_c}{2j} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \mathcal{F}\{\phi^{2n+1}(t)\} * \delta(f - f_c).\end{aligned}$$

## Ενεργό Εύρος Ζώνης (κανόνας του Carson)

- Σε πρακτικά συστήματα επικοινωνιών το εύρος ζώνης των σημάτων περιορίζεται σε ένα πεπερασμένο διάστημα  $B$ , το οποίο περιέχει σχεδόν ολόκληρη την ισχύ του διαμορφωμένου σήματος. Πρόκειται για το ενεργό εύρος ζώνης:

$$B \cong 2W(\beta + 1),$$

όπου  $\beta$  ( $= \beta_p$  ή  $\beta_f$ ) ο δείκτης διαμόρφωσης.

- Το παραπάνω ισχύει τόσο για τη διαμόρφωση PM όσο και για την FM.



## Άσκηση 2

Έστω το ακόλουθο σήμα πληροφορίας

$$m(t) = 10 \operatorname{sinc}(10^4 t).$$

Να υπολογιστεί το ενεργό εύρος ζώνης μετάδοσης ενός διαμορφωμένου κατά FM σήματος με  $K_f = 4 \text{ KHz/Volt}$ .



## Λύση Άσκησης 2

- Ο μετασχηματισμός Fourier του  $m(t)$ :

$$\mathcal{F}\{m(t)\} = \frac{10}{10^4} \Pi\left(\frac{f}{10^4}\right).$$

- Συνεπώς, το εύρος ζώνης του σήματος πληροφορίας είναι:  
 $W = 10^4/2 = 5 \text{ KHz}$ .
- Ισχύει  $\max |\text{sinc}(\cdot)| = 1$ , οπότε:

$$\max |m(t)| = 10 \Rightarrow \beta_f = \frac{K_f \max |m(t)|}{W} = 8.$$

- Τελικά, το ενεργό εύρος ζώνης μετάδοσης προκύπτει ως:

$$B = 2W(\beta_f + 1) = 2 \times 5000 (8 + 1) = 90 \text{ KHz}.$$

$m(t) = \text{Sinc}(t)$   
 $\max = 1$

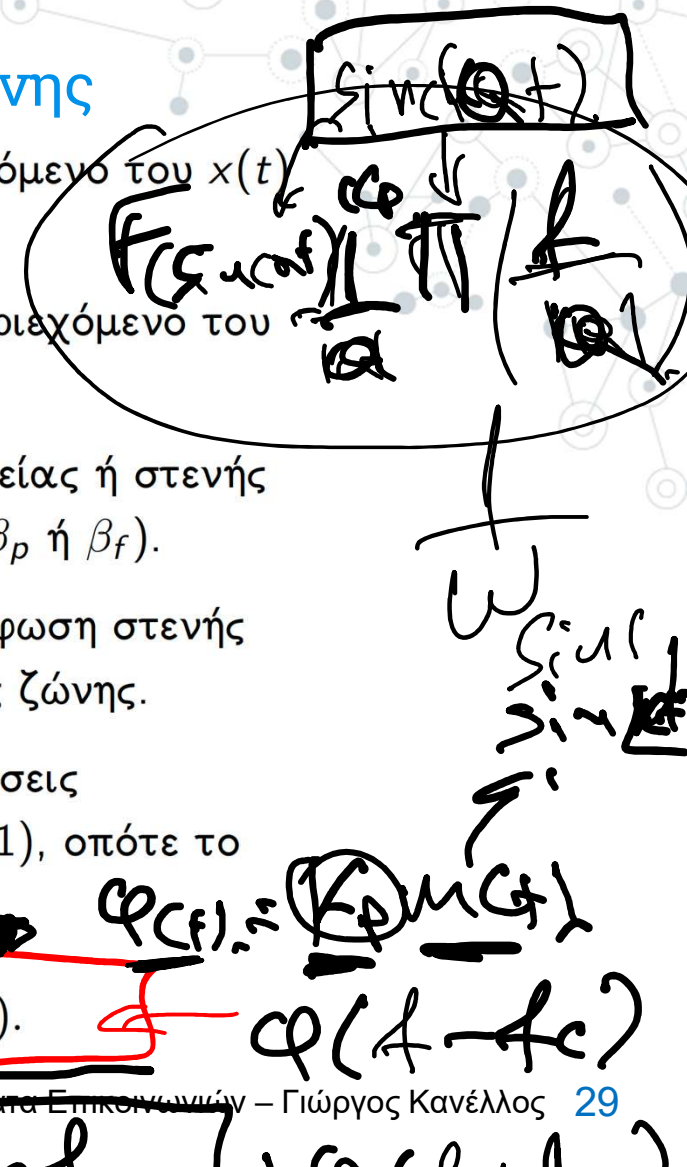
$\left( \max |m(t)| \right)$



## Διαμόρφωση Γωνίας Στενής και Ευρείας Ζώνης

- Ευρείας ζώνης (WB: Wide Band): φασματικό περιεχόμενο του  $x(t)$  εκτείνεται σε μεγάλο/ευρύ διάστημα.
- Στενής ζώνης (NB: Narrow Band): το φασματικό περιεχόμενο του  $x(t)$  εκτείνεται σε μικρό/στενό διάστημα.
- Ο διαχωρισμός ανάμεσα σε διαμόρφωση γωνίας ευρείας ή στενής ζώνης εξαρτάται από το δείκτη διαμόρφωσης  $\beta$  ( $= \beta_p$  ή  $\beta_f$ ).
- Όταν  $\beta \ll 1$  προκύπτει ότι  $B \cong 2W$ , δηλαδή διαμόρφωση στενής ζώνης. Διαφορετικά, προκύπτει διαμόρφωση ευρείας ζώνης.
- Η περίπτωση  $\beta \ll 1$  επιτρέπει να γίνουν οι προσεγγίσεις  $\cos(\phi(t)) \cong 1$  και  $\sin(\phi(t)) \cong \phi(t)$  (μιας και  $\phi(t) \ll 1$ ), οπότε το διαμορφωμένο σήμα δίνεται από τη σχέση:

$$x(t) \cong A_c \cos(2\pi f_c t) - A_e \phi(t) \sin(2\pi f_c t).$$



## Διαμόρφωση Στενής Ζώνης

- Το φάσμα του διαμορφωμένου κατά γωνία στενής ζώνης σήματος:

$$X(f) \simeq \mathcal{F}\{A_c \cos(2\pi f_c t)\} - \mathcal{F}\{A_c \phi(t) \sin(2\pi f_c t)\}$$
$$= \frac{A_c}{2} \delta(f - f_c) + \frac{A_c}{2} \delta(f + f_c) - \frac{jA_c}{2} \Phi(f - f_c) + \frac{jA_c}{2} \Phi(f + f_c).$$

- Με βάση τις εκφράσεις των  $x(t)$  και  $X(f)$  προκύπτει ότι η διαμόρφωση αυτή προσομοιάζει το συμβατικό AM:
  - Περιέχει τη συνιστώσα  $A_c \cos(2\pi f_c t)$  με το φέρον κι όχι το σήμα πληροφορίας.
  - Η συνιστώσα  $A_c \phi(t) \sin(2\pi f_c t)$  είναι ένα διαμορφωμένο κατά DSB-AM-SC σήμα.

## Διαμόρφωση Στενής Ζώνης

- Οι πλευρικές φασματικές ζώνες  $\Phi(f - f_c)$  και  $\Phi(f + f_c)$  του σήματος πληροφορίας έχουν διαφορά φάσης  $\frac{\pi}{2}$  σε σχέση με τη συνιστώσα του φέροντος. Το  $\Phi(f - f_c)$  προηγείται κατά  $\frac{\pi}{2}$  ενώ το  $\Phi(f + f_c)$  έπεται.
- Οι πλευρικές ζώνες του σήματος πληροφορίας παρουσιάζουν μεταξύ τους διαφορά φάσης  $\pi$ .
- Το εύρος ζώνης του διαμορφωμένου σήματος είναι περίπου ίσο με  $2W$ , όσο δηλαδή και στην διαμόρφωση AM.

## Ημιτονοειδές Σήμα Πληροφορίας $m(t)$

- Έστω το σήμα πληροφορίας:

$$m(t) = \alpha \cos(2\pi \underline{f_m} t).$$

- Να υπολογιστεί το διαμορφωμένο σήμα κατά:
  - 1 NBFM με  $\beta_f \ll 1$ .
  - 2 WBFM.



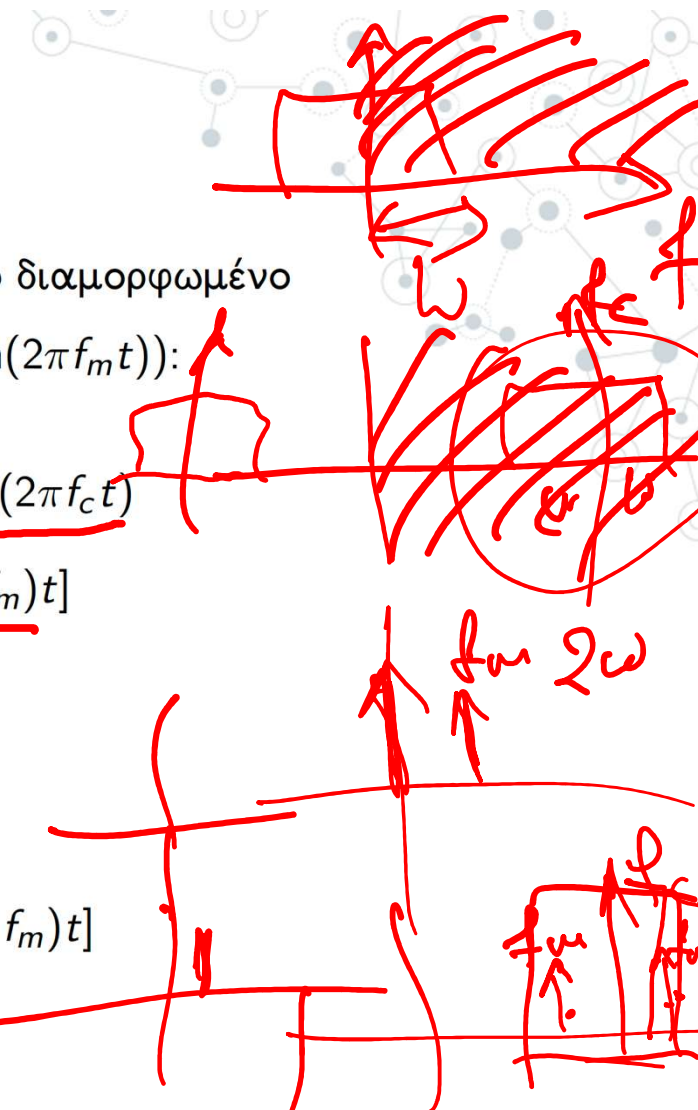
## Διαμόρφωση NBFM

- Με βάση τη συνθήκη  $\beta_f \ll 1$  και την ταυτότητα  $2 \sin(a) \sin(b) = \cos(a - b) - \cos(a + b)$  προκύπτει το διαμορφωμένο κατά NBFM σήμα  $(\phi(t) = 2\pi K_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau = \beta_f \sin(2\pi f_m t))$ :

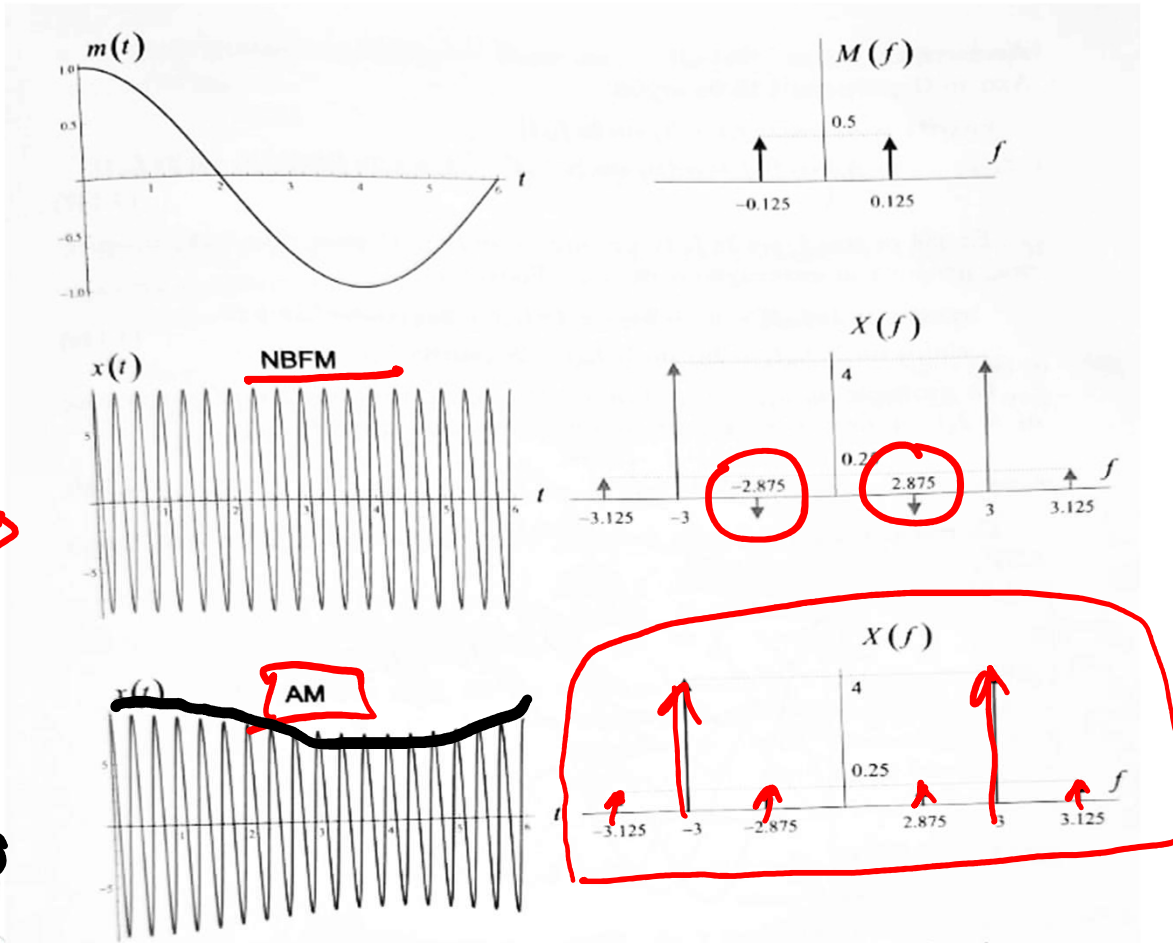
$$\begin{aligned}
 x^{\text{FM}}(t) &\cong A_c \cos(2\pi f_c t) - A_c \beta_f \sin(2\pi f_m t) \sin(2\pi f_c t) \\
 &= A_c \cos(2\pi f_c t) + \frac{A_c \beta_f}{2} \cos[2\pi(f_c + f_m)t] \\
 &\quad - \frac{A_c \beta_f}{2} \cos[2\pi(f_c - f_m)t].
 \end{aligned}$$

- Η περίπτωση της διαμόρφωσης AM:

$$\begin{aligned}
 x^{\text{AM}}(t) &= A_c \cos(2\pi f_c t) + \frac{A_c \mu}{2} \cos[2\pi(f_c + f_m)t] \\
 &\quad + \frac{A_c \mu}{2} \cos[2\pi(f_c - f_m)t].
 \end{aligned}$$



# Διαμόρφωση NBFM



## Διαμόρφωση WBFM

- Στην περίπτωση αυτή δεν ισχύει η γραμμική προσέγγιση μέσω της σειράς Taylor πρώτης τάξης. Το διαμορφωμένο κατά WBFM σήμα γράφεται:

$$\begin{aligned}x(t) &= A_c \cos(2\pi f_c t + \beta_f \sin(2\pi f_m t)) \\ &= \Re \left\{ A_c e^{j(2\pi f_c t + \beta_f \sin(2\pi f_m t))} \right\} \\ &= \Re \left\{ \underbrace{A_c e^{j\beta_f \sin(2\pi f_m t)}}_{=g(t)} e^{j2\pi f_c t} \right\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_{FM}(t) &= A_c \cos[2\pi f_c t + \beta_f \sin 2\pi f_m t] \\ &= A_c \cos 2\pi f_c t \cos(\beta_f \sin 2\pi f_m t) - A_c \sin 2\pi f_c t \sin(\beta_f \sin 2\pi f_m t).\end{aligned}\tag{4.147}$$

## Διαμόρφωση WBFM

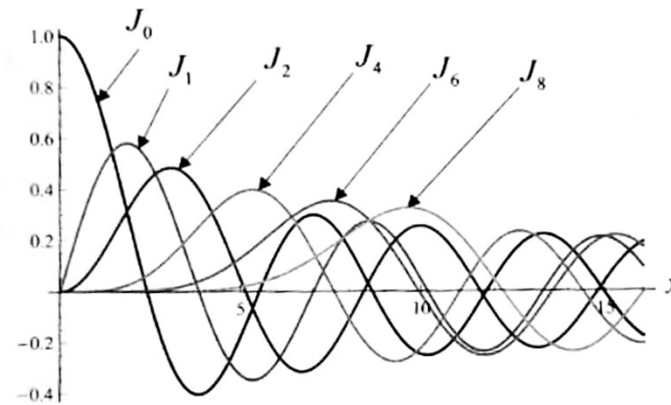
Επειδή οι  $\cos(\beta_f \sin 2\pi f_m t)$  και  $\sin(\beta_f \sin 2\pi f_m t)$  είναι περιοδικές συναρτήσεις, μπορούν να αναπτυχθούν σε σειρά Fourier ως

$$\begin{aligned}\cos[\beta_f \sin 2\pi f_m t] &= a_0 + 2a_2 \cos 4\pi f_m t + 2a_4 \cos 8\pi f_m t + \dots \\ \sin[\beta_f \sin 2\pi f_m t] &= 2a_1 \sin 2\pi f_m t + 2a_3 \sin 6\pi f_m t + \dots\end{aligned}\quad (4.148)$$

Οι σταθερές  $a_0, a_1, \dots, a_k$  είναι άπειρες σειρές και μπορούν να γραφούν ως  $a_k = J_k(\beta_f)$ , όπου η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους ορίζεται ως

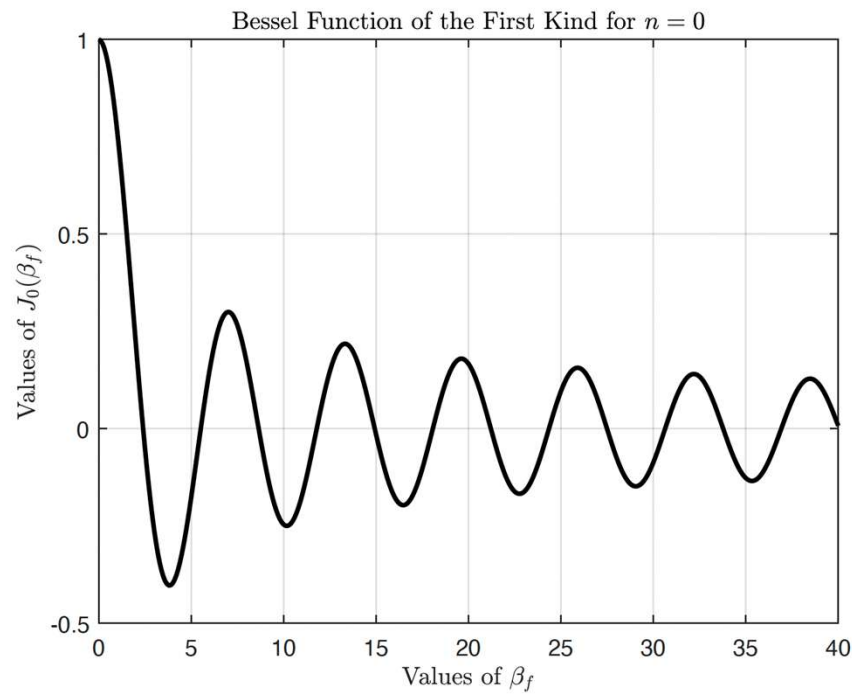
$$J_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j(kz - x \sin z)} dz. \quad (4.149)$$

Οι συναρτήσεις Bessel για διάφορες τιμές του  $k$  σχεδιάζονται στο Σχήμα 4.33<sup>7</sup>.

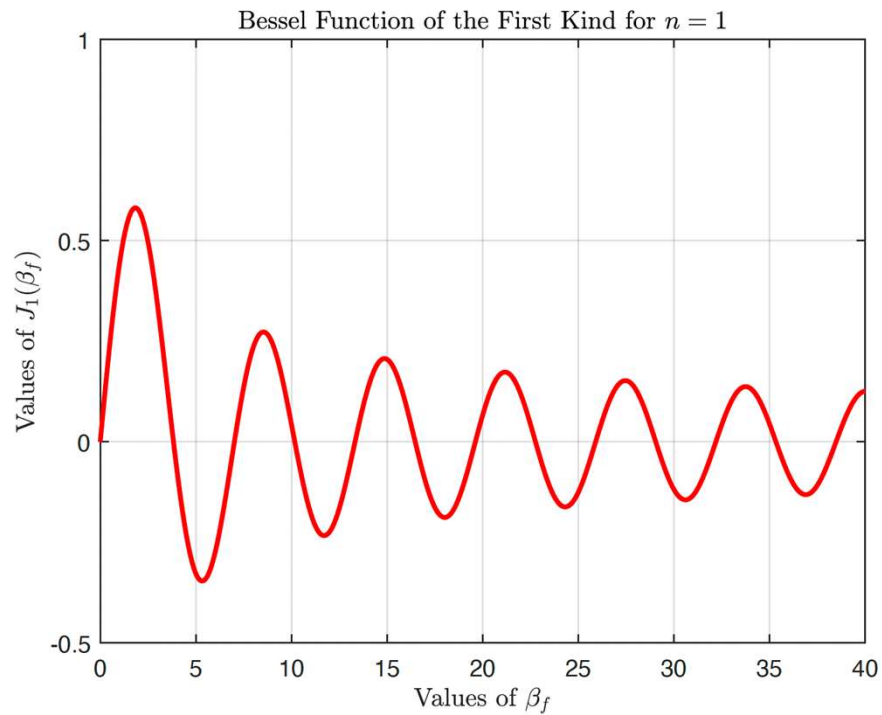


Σχήμα 4.33: Συνάρτηση Bessel,  $J_k(x)$

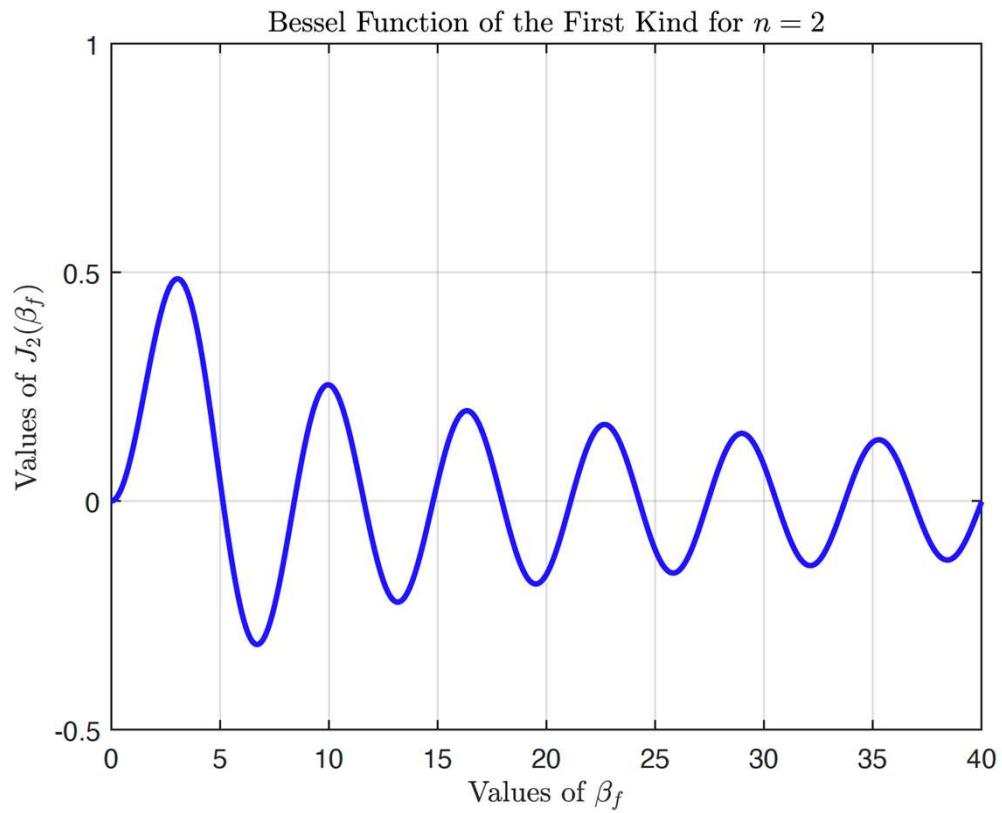
## Η Συνάρτηση $J_0(\beta_f)$



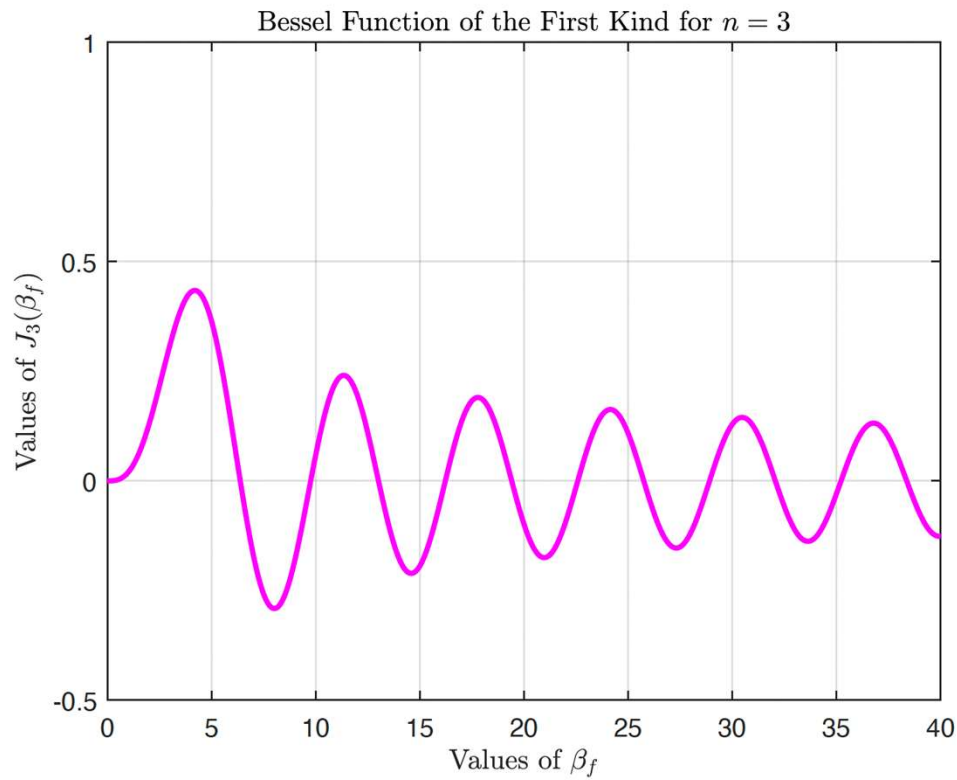
## Η Συνάρτηση $J_1(\beta_f)$



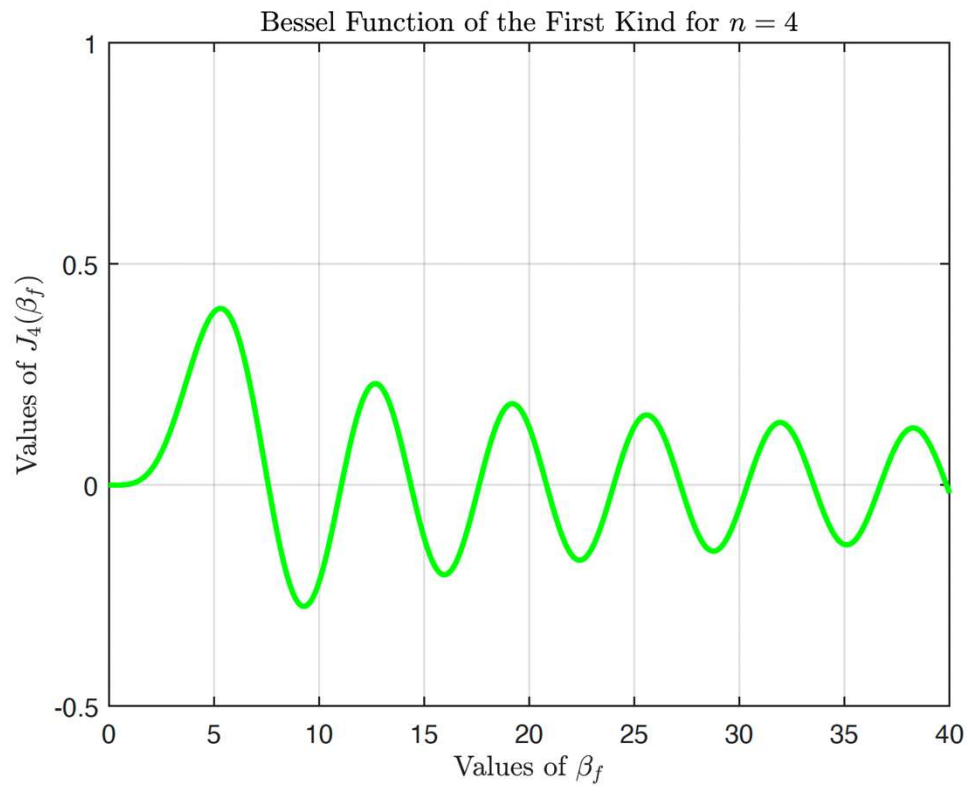
## Η Συνάρτηση $J_2(\beta_f)$



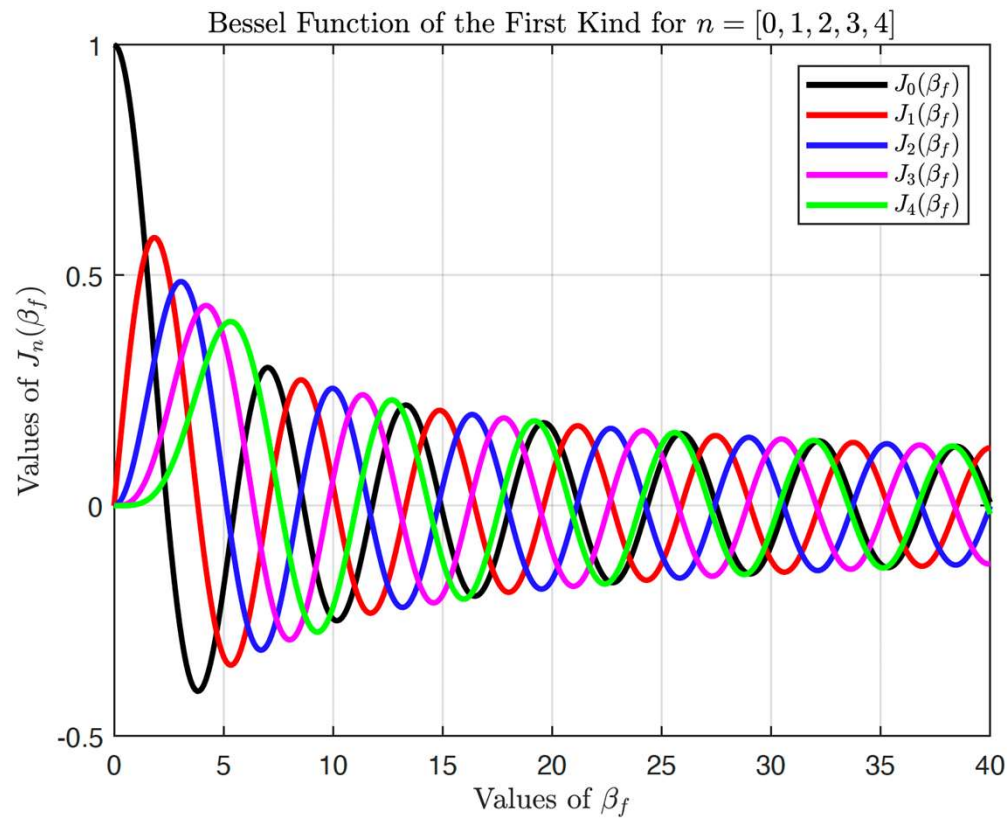
## Η Συνάρτηση $J_3(\beta_f)$



## Η Συνάρτηση $J_4(\beta_f)$



# Όλες οι Προηγούμενες Συναρτήσεις Bessel Μαζί



## Πίνακας Τιμών Bessel Συναρτήσεων $J_n(\beta_f)$

Modulation index	Sideband																
	Carrier	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0.00	1.00																
0.25	0.98	0.12															
0.5	0.94	0.24	0.03														
1.0	0.77	0.44	0.11	0.02													
1.5	0.51	0.56	0.23	0.06	0.01												
2.0	0.22	0.58	0.35	0.13	0.03												
2.41	0	0.52	0.43	0.20	0.06	0.02											
2.5	-0.05	0.50	0.45	0.22	0.07	0.02	0.01										
3.0	-0.26	0.34	0.49	0.31	0.13	0.04	0.01										
4.0	-0.40	-0.07	0.36	0.43	0.28	0.13	0.05	0.02									
5.0	-0.18	-0.33	0.05	0.36	0.39	0.26	0.13	0.05	0.02								
5.53	0	-0.34	-0.13	0.25	0.40	0.32	0.19	0.09	0.03	0.01							
6.0	0.15	-0.28	-0.24	0.11	0.36	0.36	0.25	0.13	0.06	0.02							
7.0	0.30	0.00	-0.30	-0.17	0.16	0.35	0.34	0.23	0.13	0.06	0.02						
8.0	0.17	0.23	-0.11	-0.29	-0.10	0.19	0.34	0.32	0.22	0.13	0.06	0.03					
8.65	0	0.27	0.06	-0.24	-0.23	0.03	0.26	0.34	0.28	0.18	0.10	0.05	0.02				
9.0	-0.09	0.25	0.14	-0.18	-0.27	-0.06	0.20	0.33	0.31	0.21	0.12	0.06	0.03	0.01			
10.0	-0.25	0.04	0.25	0.06	-0.22	-0.23	-0.01	0.22	0.32	0.29	0.21	0.12	0.06	0.03	0.01		
12.0	0.05	-0.22	-0.08	0.20	0.18	-0.07	-0.24	-0.17	0.05	0.23	0.30	0.27	0.20	0.12	0.07	0.03	0.01

- $\beta_f$ : Modulation index,  $n = 0$  (Carrier),  $1, \dots, 16$ .



## Διαμόρφωση WBFM

- Με βάση τα παραπάνω προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}x(t) &= A_c \Re \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta_f) e^{jn2\pi f_m t} e^{j2\pi f_c t} \right\} \\&= A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta_f) \Re \left\{ e^{j2\pi(f_c + nf_m)t} \right\} \\&= A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta_f) \cos(2\pi(f_c + nf_m)t).\end{aligned}$$

- Θα προκύψει το ίδιο αποτέλεσμα στην περίπτωση διαμόρφωσης PM με  $m(t) = \alpha \sin(2\pi f_c t)$  και  $K_p = 2\pi K_f$ .



## Διαμόρφωση WBFM

- Το φάσμα του διαμορφωμένου κατά WBFM σήματος είναι φαινομενικά άπειρο. Ισχύει, όμως, ότι η περιβάλλουσα του  $J_n(\beta_f)$  φθίνει για κάθε σταθερή τιμή  $n$ .
- Επίσης, για  $n > \beta_f$ , η τιμή του  $J_n(\beta_f)$  είναι σχεδόν ίση με το μηδέν. Η συμπεριφορά αυτή συμφωνεί με τον κανόνα Carson για το ενεργό εύρος ζώνης ημιτονοειδούς σήματος:  
$$B = 2W(\beta_f + 1) = 2f_m(\beta_f + 1).$$
- Σημαντική ιδιότητα των συναρτήσεων Bessel:

$$J_{-n}(\beta_f) = \begin{cases} J_n(\beta_f), & n \text{ άρτιος} \\ -J_n(\beta_f), & n \text{ περιττός} \end{cases}.$$



## Ενεργό Εύρος Ζώνης Διαμόρφωσης WBFM

- Το ενεργό εύρος ζώνης διαμορφώσεων γωνίας ημιτονοειδούς σήματος πληροφορίας προκύπτει ως:

$$B = 2f_m(\beta + 1) = \begin{cases} 2f_m(K_p\alpha + 1), & \text{PM} \\ 2f_m(\frac{K_f\alpha}{f_m} + 1), & \text{FM} \end{cases}$$

- Ο αριθμός των αρμονικών (δηλαδή των συνιστωσών  $A_c J_n(\beta_f)\delta(f \pm (f_c + nf_m))$  στο φάσμα του  $x(t)$  που εμφανίζονται στις θετικές του συχνότητες) που περιέχονται στο ενεργό εύρος ζώνης του  $x(t)$  προκύπτει ως:

$$N = \begin{cases} 2\lfloor K_p\alpha \rfloor + 3, & \text{PM} \\ 2\lfloor \frac{K_f\alpha}{f_m} \rfloor + 3, & \text{FM} \end{cases}$$

όπου το  $\lfloor x \rfloor$  υποδεικνύει το ακέραιο μέρος του  $x$ .



## Ισχύς Διαμόρφωσης WBFM Ημιτονοειδούς Σήματος

- Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(x) = 1$ , προκύπτει ότι η ισχύς ενός διαμορφωμένου κατά FM ημιτονοειδούς σήματος δίνεται από:

$$\mathcal{P}_x^{\text{FM}} = \frac{A_c^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(x) = \frac{A_c^2}{2}.$$

### Άσκηση 3

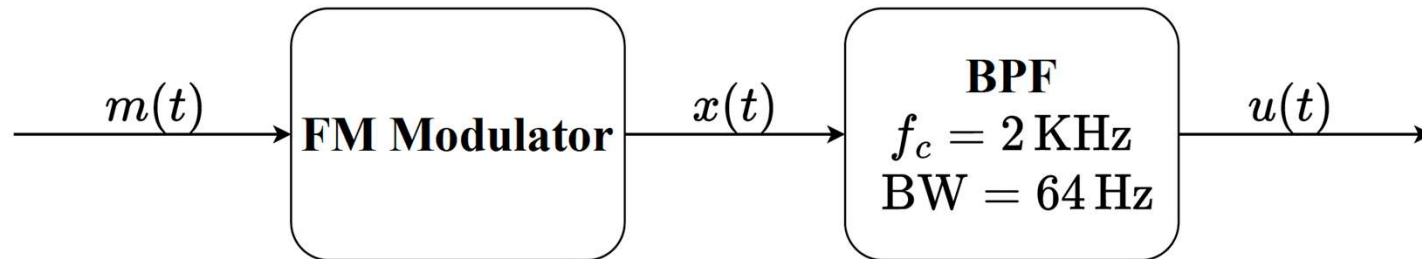
Έστω το σήμα πληροφορίας  $m(t) = 8 \cos(16\pi t)$  κι η διαμόρφωσή του κατά FM με  $K_f = 10 \text{ Hz/Volt}$ :

$$x(t) = 8 \cos \left( 4000\pi t + 2\pi K_f \int_{-\infty}^t m(t) dt \right).$$

Το τελευταίο σήμα διέρχεται από ζωνοπερατό φίλτρο με κεντρική συχνότητα  $f_c = 2 \text{ KHz}$  κι εύρος ζώνης  $64 \text{ Hz}$ .

- Να προσδιοριστεί η ισχύς του σήματος στην έξοδο του φίλτρου.
- Ποιό το ποσοστό της ισχύος που εμφανίζεται στην έξοδο του φίλτρου σε σχέση με την ισχύ του  $x(t)$ ;

## Άσκηση 3



- Ο δείκτης διαμόρφωσης υπολογίζεται ως:

$$\beta_f = \frac{K_f \max |m(t)|}{W} = \frac{10 \times 8}{8} = 10.$$

- Προφανώς  $f_c = 2$  KHz, συνεπώς:

$$x(t) = 8 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(10) \cos(2\pi(2000 + n8)t).$$

## Άσκηση 3

- Το ζωνοπερατό φίλτρο αποκόπτει τις συχνοτικές συνιστώσες του  $x(t)$  που βρίσκονται εκτός του διαστήματος  $[2000 - 32, 2000 + 32]$  Hz. Συνεπώς, η έξοδος του φίλτρου θα έχει τη μορφή:

$$u(t) = 8 \sum_{n=-4}^4 J_n(10) \cos(2\pi(2000 + n8)t).$$

- Η ισχύς του  $u(t)$  δίνεται από:

$$\mathcal{P}_u = \frac{8^2}{2} J_0^2(10) + 2 \frac{8^2}{2} \sum_{n=1}^4 J_n^2(10) = 11.1072 \text{ W}.$$

- Η ισχύς του  $x(t)$  υπολογίζεται εύκολα ως:

$$\mathcal{P}_x = \frac{8^2}{2} = 32 \text{ W}.$$

- Άρα, η ισχύς του  $u(t)$  αποτελεί το 34.71% της ισχύος του  $x(t)$ .



## Διαμορφωτές FM

- Υπάρχουν δύο τεχνικές διαμόρφωσης FM: η έμμεση (*indirect*) κι η άμεση (*direct*).
- Άμεση: χρησιμοποιείται ταλαντωτής ο οποίος παράγει σήματα των οποίων η στιγμιαία συχνότητα μεταβάλλεται με τον επιθυμητό τρόπο.
- Έμμεση: για την υλοποίηση του διαμορφωτή WBFM υλοποιείται πρώτα η διαμόρφωση NBFM η οποία έπειτα μετατρέπεται σε ευρείας ζώνης.



## Άμεσος Διαμορφωτής FM (1/2)

VCO: voltage controlled oscillator

- Χρησιμοποιείται VCO του οποίου η συχνότητα της εξόδου του μεταβάλλεται ως συνάρτηση της τάσης εισόδου του.
- Έστω ότι η είσοδος του VCO είναι το σήμα  $m(t)$ . Τότε, η στιγμιαία συχνότητα της εξόδου του ταλαντωτή είναι:

$$f_i(t) = f_c + Km(t),$$

- $f_c$ : ονομαστική συχνότητα (*free-running frequency*) εξόδου του VCO που αντιστοιχεί σε μηδενική τάση εισόδου. Πρόκειται για τη συχνότητα του φέροντος.
- $K$ : σταθερά που εξαρτάται από το VCO.

## Άμεσος Διαμορφωτής FM (2/2)

- Για να διατηρείται σταθερή η  $f_c$  (κι όχι να προκύπτει  $f_c(t)$ ) χρησιμοποιείται, συνήθως, ένα κύκλωμα ανάδρασης (π.χ. PLL με crystal oscillator) με κάποια συχνότητα αναφοράς  $f_{\text{ref}}$ .
- Το σήμα εξόδου του VCO είναι ένα διαμορφωμένο κατά FM σήμα:

$$x(t) = A_c \cos \left( 2\pi f_c t + 2\pi K \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \right).$$

## Κυκλώματα Ολοκληρωτή και Διαφοριστή

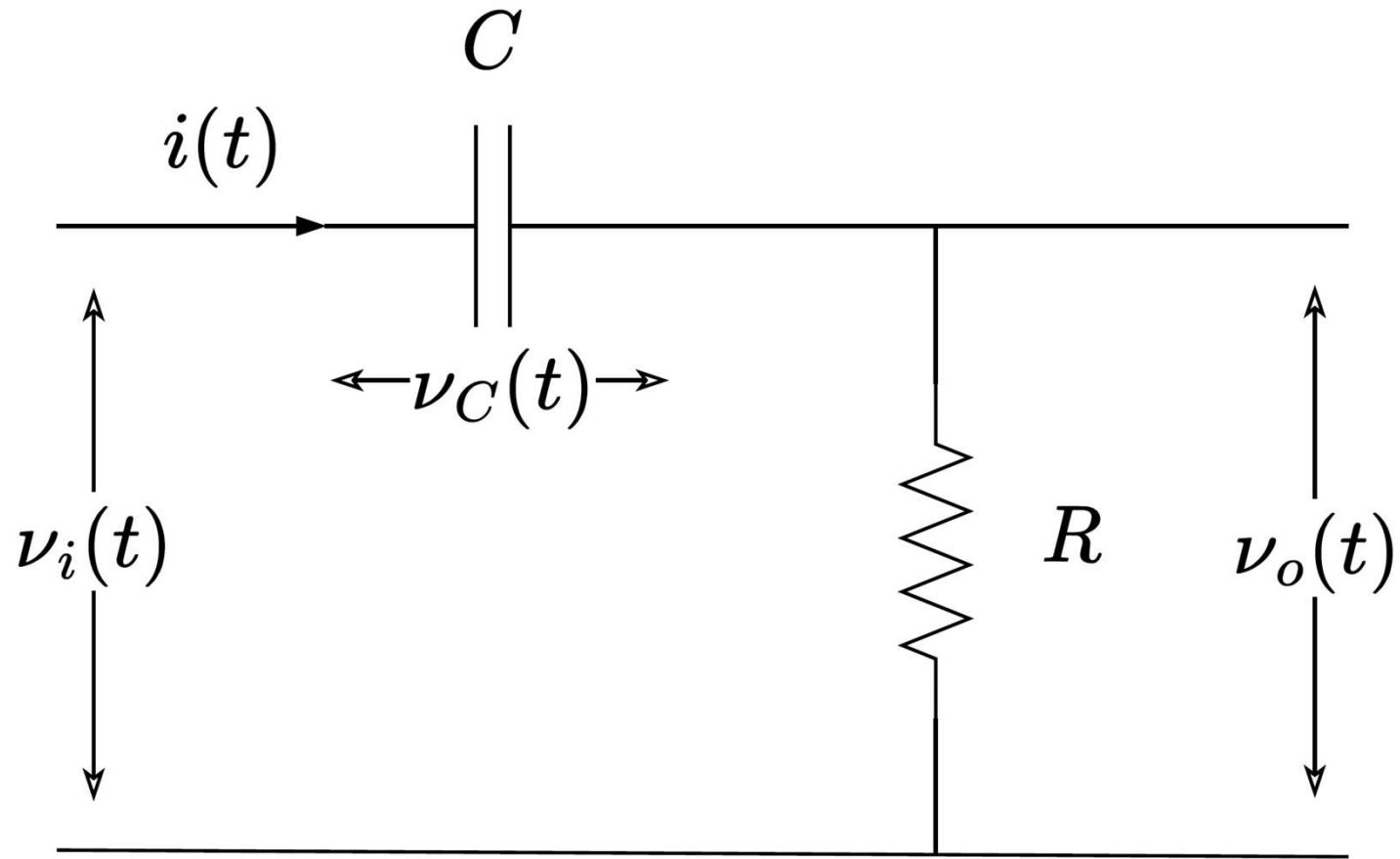
- Κυκλώματα ολοκλήρωσης και διαφορίσης σημάτων είναι απλά στην σχεδίαση.
- Βασίζονται στην ιδιότητα του πυκνωτή να συνδέει το ρεύμα που τον διαρρέει με την τάση στα άκρα του με βάση τη σχέση:

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \text{ και } v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau.$$

- Συνήθως, χρησιμοποιούνται κυκλώματα που περιέχουν και τελεστικούς ενισχυτές (*operational amplifiers*). Για ευκολία όμως, θα παρουσιαστούν τα απλοποιημένα ισοδύναμά τους με κατάλληλη επιλογή αντίστασης  $R$ .



## Κυκλώμα Διαφοριστή



## Κυκλώμα Διαφοριστή

- Νόμος του Kirchoff για τις τάσεις σε έναν κλειστό βρόγχο:

$$v_i(t) = v_C(t) + i(t)R = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau + i(t)R \xrightarrow{\mathcal{F}\{.\}}$$

$$V_i(f) = \frac{I(f)}{j2\pi fC} + I(f)R = I(f) \left( \frac{1}{j2\pi fC} + R \right).$$

- Για  $R \ll \frac{1}{2\pi fC}$  προκύπτει ότι:

$$V_i(f) \cong \frac{I(f)}{j2\pi fC} \Rightarrow I(f) \cong j2\pi fC V_i(f) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}\{.\}}$$

$$i(t) \cong C \frac{dv_i(t)}{dt}.$$

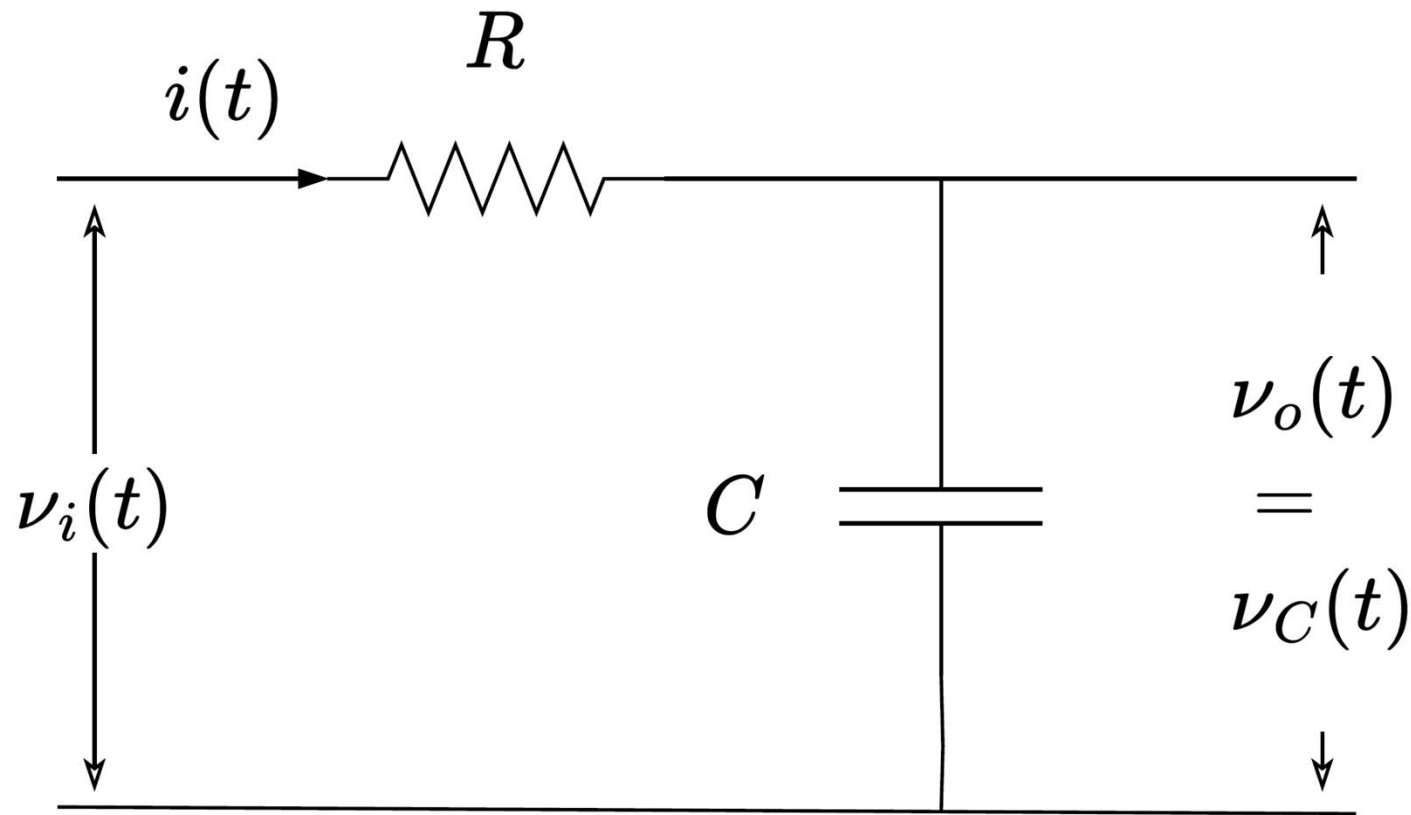
## Κυκλώμα Διαφοριστή

- Η τάση εξόδου  $v_o(t)$  του κυκλώματος είναι η τάση στα άκρα της αντίστασης  $R$ . Άρα, από τον νόμο του Ohm προκύπτει ότι:

$$v_o(t) = i(t)R = RC \frac{dv_i(t)}{dt}.$$

- Προφανώς, το  $v_o(t)$  είναι ανάλογο της παραγώγου της εισόδου του κυκλώματος.

## Κυκλώμα Ολοκληρωτή



## Κυκλώμα Ολοκληρωτή

- Νόμος του Kirchoff για τις τάσεις σε έναν κλειστό βρόγχο:

$$v_i(t) = v_C(t) + i(t)R = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau + i(t)R \xrightarrow{\mathcal{F}\{.\}}$$

$$V_i(f) = \frac{I(f)}{j2\pi fC} + I(f)R = I(f) \left( \frac{1}{j2\pi fC} + R \right).$$

- Για  $R \gg \frac{1}{2\pi fC}$  προκύπτει ότι:

$$V_i(f) \cong I(f)R \Rightarrow I(f) \cong \frac{V_i(f)}{R} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}\{.\}}$$

$$i(t) \cong \frac{v_i(t)}{R}.$$



## Κυκλώμα Ολοκληρωτή

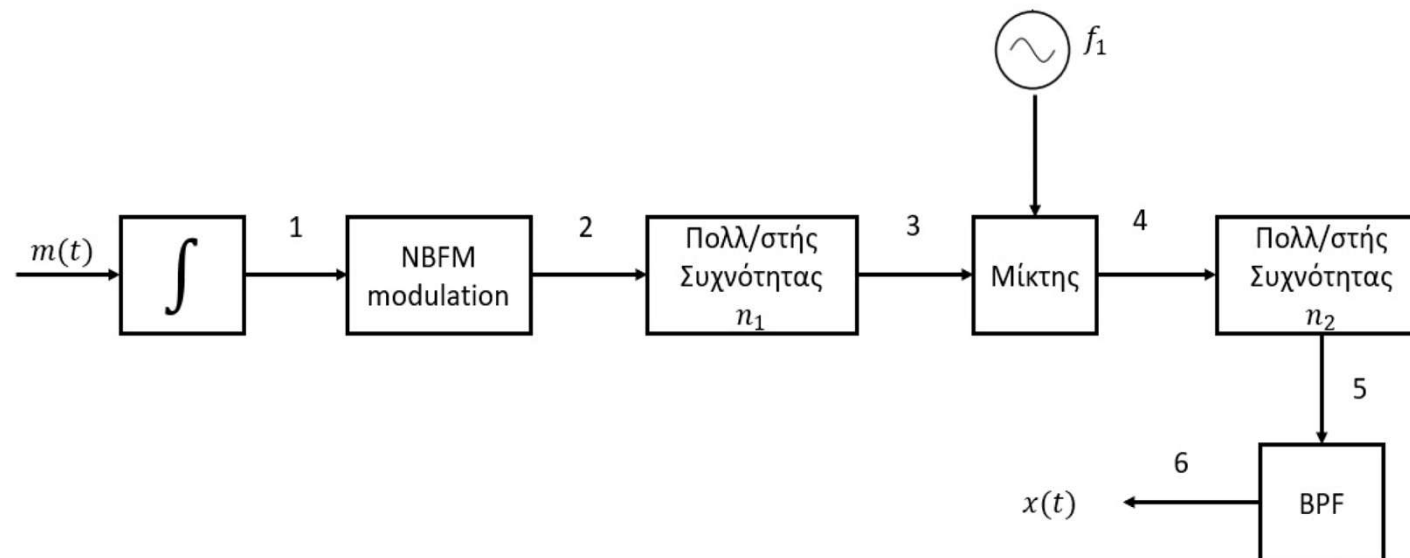
- Η τάση εξόδου  $v_o(t)$  του ολοκληρώματος είναι η τάση στα άκρα του πυκνωτή, δηλαδή:

$$v_o(t) = v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t v_i(\tau) d\tau.$$

- Προφανώς, το  $v_o(t)$  είναι ανάλογο του ολοκληρώματος της εισόδου του κυκλώματος.

## Έμμεσος Διαμορφωτής FM (1/3)

- Η έμμεση διαμόρφωση FM περιλαμβάνει τα ακόλουθα έξι βήματα (χωρίς βλάβη της γενικότητας το σήμα πληροφορίας βασικής ζώνης:  $m(t) = \alpha \cos(2\pi f_m t)$ ):



## Έμμεσος Διαμορφωτής FM (2/3)

- 1 Ολοκλήρωση του  $m(t)$  με κύκλωμα ολοκληρωτή.
- 2 Διαμόρφωση NBFM με μικρό  $\beta_f$ , η οποία επιτυγχάνεται με απλό τρόπο χρησιμοποιώντας κύκλωμα διαμόρφωσης DSB-AM-SC:

$$x_{\text{NBFM}}(t) = A_c \cos(2\pi f_0 t + \beta_f \sin(2\pi f_m t)),$$

όπου  $f_0$  μια αρχική συχνότητα.

- 3 Πολλαπλασιασμός συχνότητας με έναν παράγοντα  $n_1$ :

$$x(t) = A_c \cos(n_1 2\pi f_0 t + n_1 \beta_f \sin(2\pi f_m t)).$$



## Έμμεσος Διαμορφωτής FM (3/3)

- 4 Ετεροδύνωση, δηλαδή συχνοτική μετακίνηση του  $x(t)$  στη νέα συχνότητα  $f_{IF} = n_1 f_0 + f_1$ :

$$x(t) = A_c \cos(2\pi f_{IF} t + n_1 \beta_f \sin(2\pi f_m t)).$$

- 5 Περαιτέρω πολλαπλασιασμός συχνότητας με έναν παράγοντα  $n_2$ :

$$x(t) = A_c \cos(n_2 2\pi f_{IF} t + n_1 n_2 \beta_f \sin(2\pi f_m t)).$$

- 6 Το τελικά διαμορφωμένο κατά WBFM σήμα έχει συχνότητα  $f_c \triangleq n_2(n_1 f_0 + f_1)$  και δείκτη διαμόρφωσης  $\beta_{f_{WB}} \triangleq n_1 n_2 \beta_f$ . Το ζωνοπερατό φίλτρο βοηθά στην απομάκρυνση των ανεπιθύμητων συχνοτήτων που δημιουργήθηκαν από μη γραμμικά στοιχεία.

$$x(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \beta_{f_{WB}} \sin(2\pi f_m t)).$$

## Σύγκριση Έμμεσης κι Άμεσης Διαμόρφωσης FM

### Έμμεση Διαμόρφωση:

- Παράγει σταθερή συχνότητα  $f_c$ .
- Περιέχει αρκετά μη γραμμικά στοιχεία για την υλοποίηση των πολλαπλασιαστών, τα οποία προσδίδουν θόρυβο στο κύκλωμα.

### Άμεση Διαμόρφωση:

- Παράγει ασταθή συχνότητα  $f_c$ . Το πρόβλημα αυτό βελτιώνεται με τη χρήση συχνότητας αναφοράς και κυκλώματος ανάδρασης.



## Αποδιαμόρφωση FM (1/2)

- Υπενθυμίζεται η γενική μορφή διαμορφωμένου κατά FM σήματος:

$$x(t) = A_c \cos \left( 2\pi f_c t + 2\pi K \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \right).$$

- Με παραγωγή ως προς το χρόνο προκύπτει ένα νέο σήμα:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{dx(t)}{dt} \\ &= -A_c (2\pi f_c + 2\pi K m(t)) \sin \left( 2\pi f_c t + 2\pi K \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \right). \end{aligned}$$

- Το  $y(t)$  είναι επίσης ένα διαμορφωμένο κατά FM σήμα με περιβάλλουσα η οποία μεταβάλλεται γραμμικά με το  $m(t)$  (αντίστοιχα συμβαίνει με τη διαμόρφωση AM):

$$V(t) = A_c (2\pi f_c + 2\pi K m(t)).$$



## Αποδιαμόρφωση FM (2/2)

- Συνεπώς, χρησιμοποιώντας ανιχνευτή περιβάλλουσας (δηλαδή, ασύμφωνη αποδιαμόρφωση) με είσοδο το  $y(t)$  δύναται να προκύψει στην έξοδο το  $m(t)$ .
- Απαραίτητη προϋπόθεση για τη διαδικασία αυτή είναι το πλάτος του φέροντος  $A_c$  να είναι χρονικά αμετάβλητο, ειδάλλως θα προέκυπτε στο  $y(t)$  ένας όρος με το  $\frac{dA_c(t)}{dt}$ . Ακόμα και στην περίπτωση αγνόησης αυτού του όρου θα προκύψει παραμόρφωση στην περιβάλλουσα:

$$\frac{dA_c(t)}{dt} \neq 0 \Rightarrow V(t) = A_c(t) (2\pi f_c + 2\pi Km(t))$$
$$\Rightarrow \tilde{r}(t) = A_c(t) 2\pi Km(t).$$



Σχήμα 4.39: Διάγραμμα αποδιαμορφωτή FM

- Για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος χρησιμοποιείται κύκλωμα σταθεροποίησης πλάτους (μέσω ζωνοπερατού περιοριστή (*bandpass limiter*)).

## Τέλος μαθήματος

🎯 Ερωτήσεις?

