K21 - Συστήματα Επικοινωνιών

4ο Εξάμηνο
Τομέας Γ’ / Τμήμα Πληροφορικής και Επικοινωνιών
ΕΚΠΑ 2024-2025
Διαμόρφωση FM/PM

Γιώργος Κανέλλος

Επίκουρος Καθηγητής
Τμήμα Πληροφορικής και Επικοινωνιών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
gtkanellos@di.uoa.gr

Συστήματα Επικοινωνιών

1. Διαμορφώσεις Φάσης και Συχνότητας
2. Φάσμα Διαμόρφωσης Γωνίας
3. Διαμόρφωση κι Αποδιαμόρφωση FM

Διαμόρφωση Γωνίας

- Για το σήμα πληροφορίας $m(t)$, το διαμορφωμένο κατά AM σήμα προκύπτει ως (με φέρον $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$):

$$x(t) = (A_c + m(t)) \cos(2\pi f_c t) .$$

- Πέραν του πλάτους, το σήμα $m(t)$ δύναται να ενσωματωθεί στη συχνότητα ή τη φάση του $x(t)$ διατηρώντας το πλάτος του σταθερό.
- Η διαμόρφωση αυτή ονομάζεται *διαμόρφωση φάσης (PM: Phase Modulation)* ή *διαμόρφωση συχνότητας (FM: Frequency Modulation)*.
- Ένα διαμορφωμένο κατά PM ή FM σήμα ορίζεται ως:

$$x(t) = A_c \cos(\theta(t)), \;\; \theta(t) \triangleq 2\pi f_c t + \phi(t), \;\; \phi(t) \triangleq f(m(t)).$$

Διαμόρφωση Γωνίας και Πλάτους

- Η διαμόρφωση γωνίας υπερτερεί της διαμόρφωσης AM στην ποιότητα του σήματος πληροφορίας καθώς επηρεάζεται λιγότερο από πηγές θορύβου.
- Δηλαδή, για δεδομένη ισχύ εκπομπής, η διαμόρφωση γωνίας επιτυγχάνει καλύτερη ποιότητα μετάδοσης. Ισοδύναμα, για δεδομένη απαίτηση ποιότητας μετάδοσης, η διαμόρφωση γωνίας χρειάζεται μικρότερη ισχύ εκπομπής.
- Ο θόρυβος επηρεάζει άμεσα το πλάτος του λαμβανόμενου σήματος ενώ η επίδραση στη φάση είναι λιγότερο σημαντική.
- Όμως, η διαμόρφωση γωνίας απαιτεί πιο ακριβά και πολύπλοκα συστήματα.

Στιγμιαία Συχνότητα

- Η *στιγμιαία συχνότητα* *(instantaneous frequency)* του $x(t)$ ορίζεται ως εξής:

$$f_i(t) \triangleq \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(t)}{dt} = f_c + \frac{1}{2\pi}\frac{d\phi(t)}{dt}.$$

- Η έννοια αυτή δεν πρέπει να συγχέεται με τη συχνότητα όπως έχει αυτή έχει οριστεί μέσω του φάσματος. Οι συχνότητες που καταλαμβάνει ένα σήμα υπολογίζονται (μετασχηματισμός Fourier) για ολόκληρο το χρονικό του διάστημα.

- Η στιγμιαία συχνότητα ορίζεται για συγκεκριμένη χρονική στιγμή όπως αντίστοιχα ορίζεται η στιγμιαία ταχύτητα στη Μηχανική.

Διαμόρφωση Φάσης - PM

- Στη διαμόρφωση PM το $\phi(t)$ σχετίζεται γραμμικά με το $m(t)$ μέσω μίας σταθεράς K_p που ονομάζεται *ευαισθησία φάσης (phase sensitivity)* της διαμόρφωσης με μονάδα μέτρησης το $\mathrm{radians/Volt}$:

$$\phi(t) = K_p m(t).$$

- Ο δείκτης διαμόρφωσης β_p εκφράζει τη μέγιστη μετατόπιση της φάσης στο διαμορφωμένο σήμα $x(t)$:

$$\beta_p \triangleq \Delta\phi_{max} = K_p \max|m(t)|.$$

Διαμόρφωση FM (1/2)

- Στη διαμόρφωση FM ο ρυθμός μεταβολής της φάσης (ως προς το χρόνο) μεταβάλλεται γραμμικά με το $m(t)$ μέσω μιας σταθεράς K_f που ονομάζεται *ευαισθησία συχνότητας (frequency sensitivity)* της διαμόρφωσης με μονάδα μέτρησης το $\mathrm{Hz}/\mathrm{Volt}$:

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = 2\pi K_f m(t).$$

- Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της στιγμιαίας συχνότητας προκύπτει ότι (γραμμική μεταβολή ως προς το $m(t)$):

$$f_i(t) = f_c + K_f m(t).$$

- Από τον ορισμό του ρυθμού μεταβολής της φάσης προκύπτει ότι:

$$\phi(t) = 2\pi K_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau) d\tau.$$

Διαμόρφωση FM (2/2)

- Αν W είναι το εύρος ζώνης του $m(t)$, ο δείκτης διαμόρφωσης β_f εκφράζει τη μέγιστη μεταβολή της στιγμιαίας συχνότητας από την κεντρική συχνότητα f_c, κανονικοποιημένη ως προς το W:

$$\beta_f \triangleq \frac{\Delta f_{max}}{W} = \frac{K_f \max |m(t)|}{W}.$$

Διαμορφώσεις PM και FM (1/2)

- Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta),$$

το διαμορφωμένο κατά γωνία σήμα προκύπτει ως:

$$x(t) \triangleq \underbrace{A_c \cos(\phi(t))}_{=x_{\mathrm{I}}(t)} \cos(2\pi f_c t) - \underbrace{A_c \sin(\phi(t))}_{=x_{\mathrm{Q}}(t)} \sin(2\pi f_c t).$$

- Ανάλογα με το είδος της διαμόρφωσης:

$$\phi(t) = \begin{cases} K_p m(t), & \mathrm{PM} \\ 2\pi K_f \int\limits_{-\infty}^{t} m(\tau) d\tau, & \mathrm{FM} \end{cases}.$$

Διαμορφώσεις PM και FM (2/2)

- Τα ορθογώνια φέροντα $\cos(2\pi f_c t)$ και $\sin(2\pi f_c t)$ διαμορφώνονται κατά πλάτος από τις μη γραμμικές συνιστώσες $\cos(\phi(t))$ και $\sin(\phi(t))$ του $m(t)$.
- Από τις $x_{\mathrm{I}}(t) = A_c \cos(\phi(t))$ και $x_{\mathrm{Q}}(t) = A_c \sin(\phi(t))$ προκύπτει ότι:
  - $V(t) = \sqrt{x_{\mathrm{I}}^2(t) + x_{\mathrm{Q}}^2(t)} = A_c$ (δεν εμπεριέχεται το $m(t)$).
  - $\tan^{-1}\left(\frac{x_{\mathrm{Q}}(t)}{x_{\mathrm{I}}(t)}\right) = \tan^{-1}(\tan(\phi(t))) = \phi(t)$ (ισχύει $\phi(t) = f(m(t))$).
- Η ισχύς του διαμορφωμένου κατά PM/FM σήματος $x(t)$:

$$\mathcal{P}_x^{\mathrm{PM}} = \mathcal{P}_x^{\mathrm{FM}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |A_c \cos(2\pi f_c t + \phi(t))|^2 \, dt = \frac{A_c^2}{2}.$$

Δυϊκότητα στις Διαμορφώσεις PM και FM

- Αν σε διαμορφωτή PM εισαχθεί το χρονικό ολοκλήρωμα του $m(t)$, τότε προκύπτει το διαμορφωμένο σήμα:

$$x(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + K_p \int_{-\infty}^{t} m(\tau)d\tau\right).$$

- Για $K_p = 2\pi K_f$ προκύπτει η διαμόρφωση FM:

$$x(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi K_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau)d\tau\right).$$

Δυϊκότητα στις Διαμορφώσεις PM και FM

- Αντιστρόφως, αν σε διαμορφωτή FM εισαχθεί η χρονική παράγωγος του $m(t)$, τότε προκύπτει το διαμορφωμένο σήμα:

$$x(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi K_f \int_{-\infty}^{t} \frac{dm(\tau)}{d\tau} d\tau\right).$$

- Για $K_f = \frac{K_p}{2\pi}$ προκύπτει η διαμόρφωση FM:

$$x(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + K_p m(t)\right).$$

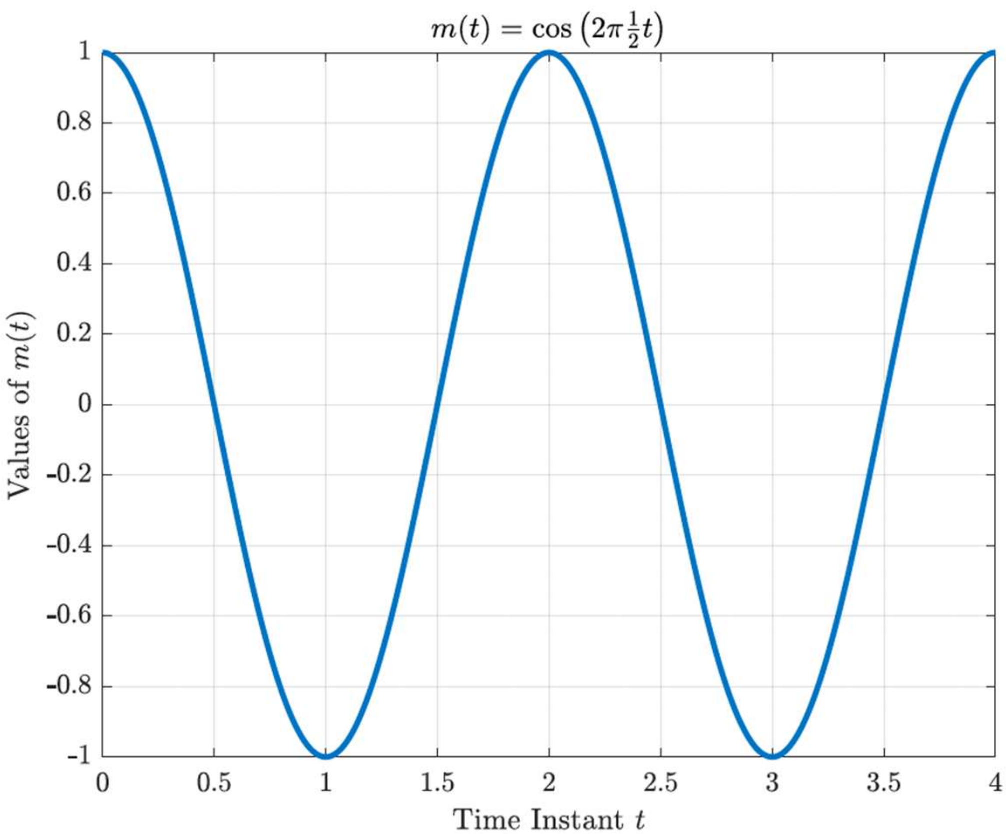
Άσκηση 1

Έστω το σήμα πληροφορίας βασικής ζώνης

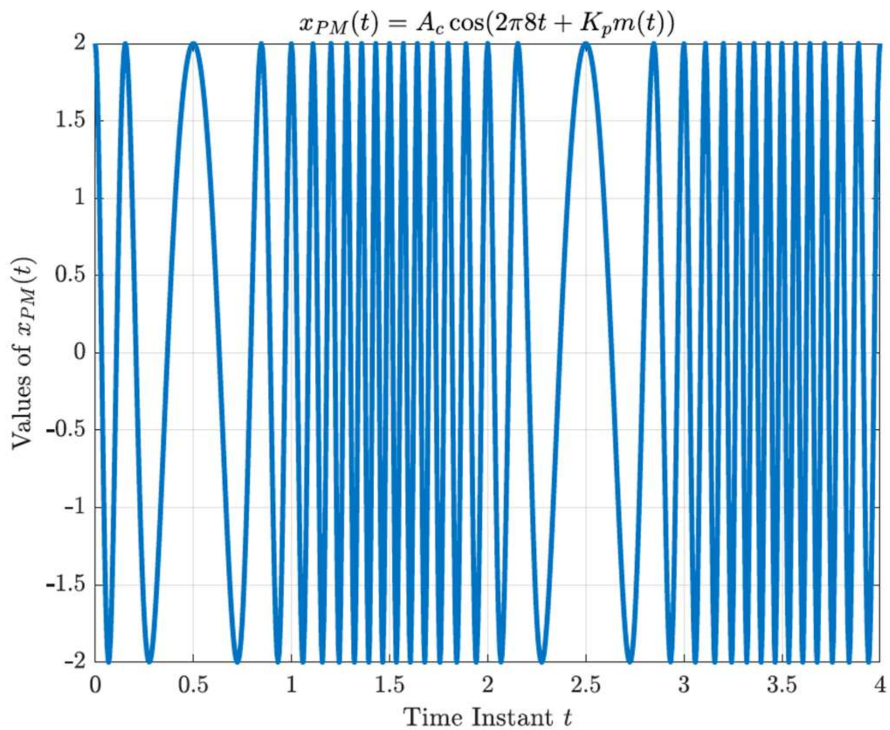
$$m(t) = \alpha \cos(2\pi f_m t).$$

Να προσδιοριστούν στο πεδίο του χρόνου τα διαμορφωμένα κατά PM και FM σήματα για φέρον της αρεσκείας σας.

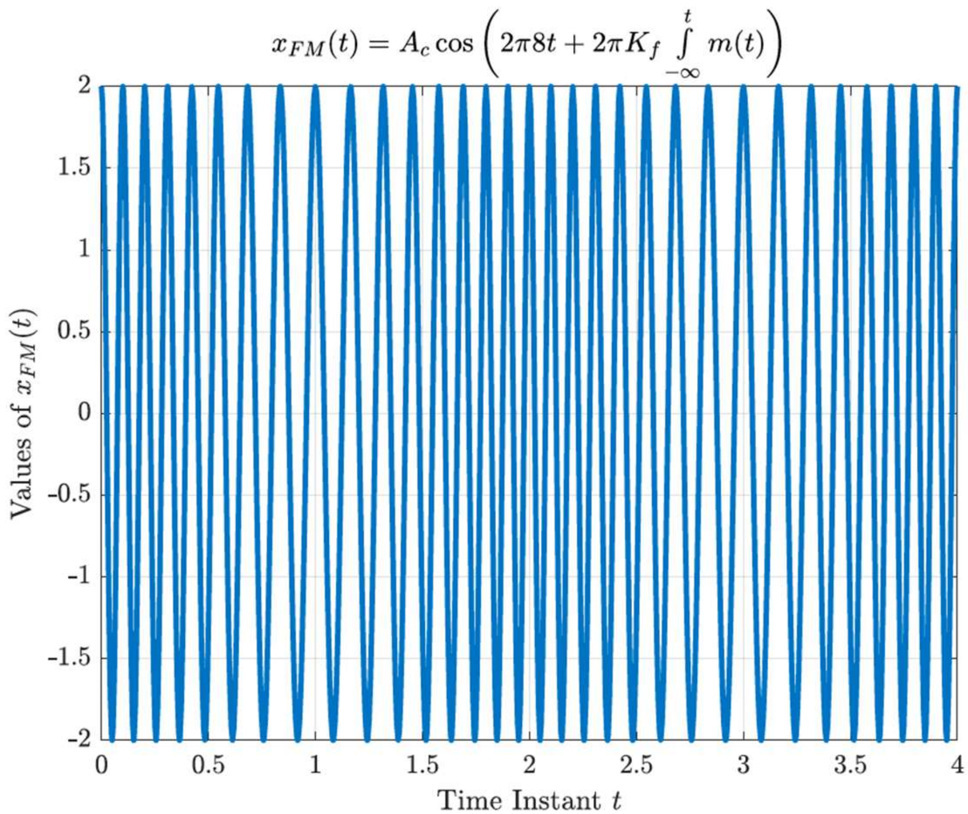
Το Σήμα Πληροφορίας m(t) = cos(2π1/2t)



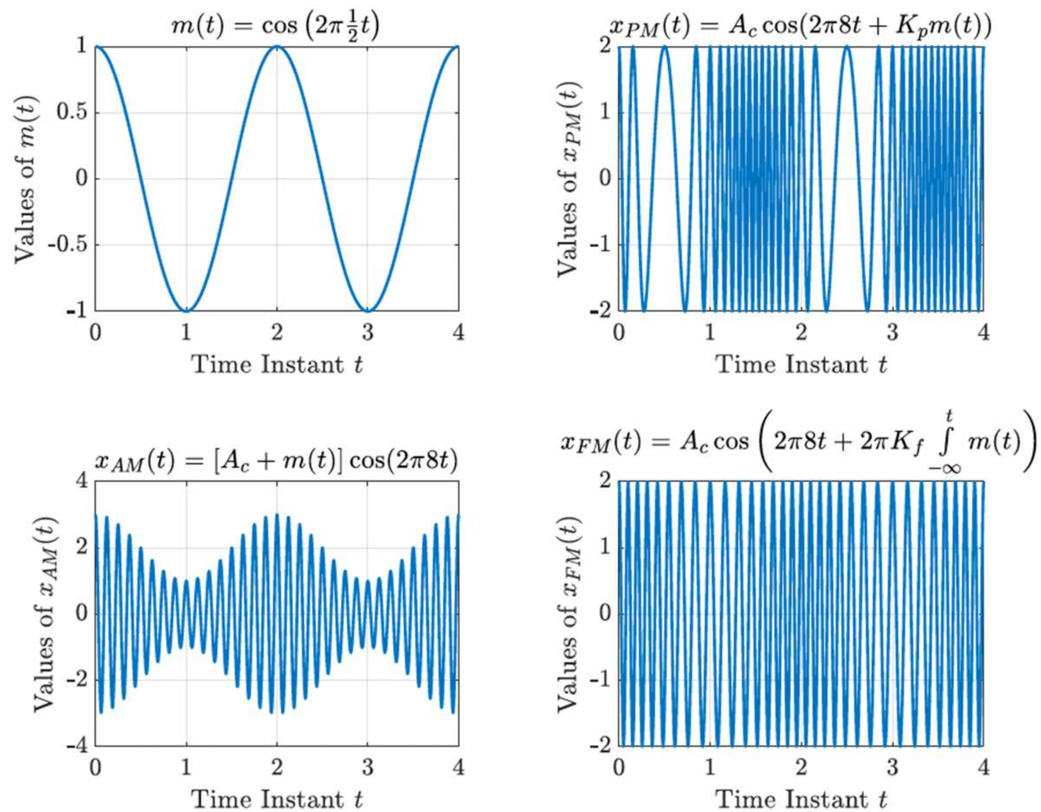
Διαμόρφωση PM



Διαμόρφωση FM



Διαμορφώσεις AM, PM και FM



1. Διαμορφώσεις Φάσης και Συχνότητας

2. Φάσμα Διαμόρφωσης Γωνίας

3. Διαμόρφωση κι Αποδιαμόρφωση FM

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier

- Υπενθυμίζονται οι μετασχηματισμοί Fourier:

$$\mathcal{F}\{\cos(2\pi f_c t)\} = \frac{1}{2}(\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)),$$
$$\mathcal{F}\{\sin(2\pi f_c t)\} = \frac{1}{2j}(\delta(f - f_c) - \delta(f + f_c)).$$

- Επίσης, για τη συνάρτηση $\delta(t)$ ισχύει:

$$f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0).$$

DEPARTMENT OF INFORMATICS & TELECOMMUNICATIONS
HELLENIC REPUBLIC
National and Kapodistrian University of Athens

Μετασχηματισμός Fourier του x(t) (1/2)

- Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω προκύπτει:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x(t)\} =& \mathcal{F}\{A_c \cos(2\pi f_c t)\cos(\phi(t))\} - \mathcal{F}\{A_c \sin(2\pi f_c t)\sin(\phi(t))\}\\ =&\frac{1}{2}A_c\mathcal{F}\{\cos(\phi(t))\} * \delta(f-f_c)\\ &+\frac{1}{2}A_c\mathcal{F}\{\cos(\phi(t))\} * \delta(f+f_c)\\ &+\frac{1}{2j}A_c\mathcal{F}\{\sin(\phi(t))\} * \delta(f+f_c)\\ &-\frac{1}{2j}A_c\mathcal{F}\{\sin(\phi(t))\} * \delta(f-f_c).\end{aligned}$$

- Αν $\kappa(f) \triangleq \mathcal{F}\{\cos(\phi(t))\}$, τότε $\mathcal{F}\{\cos(\phi(t))\} * \delta(f-f_c) = \kappa(f-f_c)$. Ομοίως και για τα υπόλοιπα.

- Δεν υπάρχουν κλειστής μορφής εκφράσεις για τα $\mathcal{F}\{\cos(\phi(t))\}$ και $\mathcal{F}\{\sin(\phi(t))\}$.

Προσέγγιση με Σειρά Taylor

- Τα πολυώνυμα, η εκθετική συνάρτηση κι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις (ημίτονο και συνημίτονο) ονομάζονται *ακέραιες αναλυτικές συναρτήσεις*.
- Π.χ. οι παρακάτω ισότητες ισχύουν για κάθε x (ανάπτυξη γύρω από το σημείο $x_0 = 0$):

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

- Για μη ακέραιες αναλυτικές συναρτήσεις (π.χ. λογάριθμο κι εφαπτομένη) οι αντίστοιχες σειρές Taylor δε συγκλίνουν αν το x απέχει από το x_0.

Μετασχηματισμός Fourier του x(t) (2/2)

- Προκύπτουν εύκολα τα αναπτύγματα σε σειρές Taylor (γύρω από το σημείο $\phi(t) = 0$):

$$\cos(\phi(t)) = 1 - \frac{\phi^2(t)}{2!} + \frac{\phi^4(t)}{4!} - \dots$$
$$\sin(\phi(t)) = \phi(t) - \frac{\phi^3(t)}{3!} + \frac{\phi^5(t)}{5!} - \dots$$

- Επομένως, το διαμορφωμένο σήμα $x(t)$ γράφεται:

$$\begin{aligned} x(t) =& A_c \cos(2\pi f_c t) - A_c \frac{\phi^2(t)}{2!} \cos(2\pi f_c t) + \dots \\ & - A_c \phi(t) \sin(2\pi f_c t) + A_c \frac{\phi^3(t)}{3!} \sin(2\pi f_c t) - \dots . \end{aligned}$$

Φασματικό Περιεχόμενο του x(t) (1/2)

- Υπενθυμίζεται η ακόλουθη ιδιότητα (με $\Phi(f) \triangleq \mathcal{F}\{\phi(t)\}$):

$$\mathcal{F}\{\phi^n(t)\} = \underbrace{\Phi(f) * \Phi(f) * \cdots * \Phi(f)}_{n \text{ φορές}}$$

- Μάλιστα, η πράξη της συνέλιξης σημάτων οδηγεί σε σήμα με εύρος ζώνης το άθροισμα των ευρών ζώνης των συνελισσόμενων σημάτων.
- Αν W είναι το εύρος ζώνης του $m(t)$, το εύρος ζώνης του $\phi(t)$ είναι επίσης W. Τότε, το εύρος ζώνης του $\phi^n(t)$ (με φάσμα $\mathcal{F}\{\phi^n(t)\}$) είναι nW.

Φασματικό Περιεχόμενο του x(t) (2/2)

- Είναι εμφανές από την ανάπτυξη σε σειρά Taylor του $x(t)$ ότι περιέχει δυνάμεις του $\phi^n(t)$ με $n \to \infty$. Συνεπώς, το φασματικό του περιεχόμενο εκτείνεται από $-\infty$ εως $+\infty$.
- Τα πλάτη όμως των επιμέρους φασμάτων των $\phi^n(t)$ εξασθενούν όσο αυξάνεται το n:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\{x(t)\} =& \frac{A_c}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\mathcal{F}\left\{\phi^{2n}(t)\right\} * \delta(f-f_c) \\
&+ \frac{A_c}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\mathcal{F}\left\{\phi^{2n}(t)\right\} * \delta(f+f_c) \\
&+ \frac{A_c}{2j}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\mathcal{F}\left\{\phi^{2n+1}(t)\right\} * \delta(f+f_c) \\
&- \frac{A_c}{2j}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\mathcal{F}\left\{\phi^{2n+1}(t)\right\} * \delta(f-f_c).
\end{aligned}
$$

Ενεργό Εύρος Ζώνης (κανόνας του Carson)

- Σε πρακτικά συστήματα επικοινωνιών το εύρος ζώνης των σημάτων περιορίζεται σε ένα πεπερασμένο διάστημα B, το οποίο περιέχει σχεδόν ολόκληρη την ισχύ του διαμορφωμένου σήματος. Πρόκειται για το *ενεργό εύρος ζώνης*:

$$B \cong 2W(\beta + 1),$$

  όπου β $(= \beta_p$ ή $\beta_f)$ ο δείκτης διαμόρφωσης.

- Το παραπάνω ισχύει τόσο για τη διαμόρφωση PM όσο και για την FM.

Άσκηση 2

Έστω το ακόλουθο σήμα πληροφορίας

$$m(t) = 10\,\mathrm{sinc}(10^4 t).$$

Να υπολογιστεί το ενεργό εύρος ζώνης μετάδοσης ενός διαμορφωμένου κατά FM σήματος με $K_f = 4\,\mathrm{KHz/Volt}$.

Λύση Άσκησης 2

- Ο μετασχηματισμός Fourier του $m(t)$:

$$\mathcal{F}\{m(t)\} = \frac{10}{10^4}\Pi\left(\frac{f}{10^4}\right).$$

- Συνεπώς, το εύρος ζώνης του σήματος πληροφορίας είναι: $W = 10^4/2 = 5 \text{ KHz}.$
- Ισχύει $\max|\text{sinc}(\cdot)| = 1$, οπότε:

$$\max|m(t)| = 10 \Rightarrow \beta_f = \frac{K_f max|m(t)|}{W} = 8.$$

- Τελικά, το ενεργό εύρος ζώνης μετάδοσης προκύπτει ως:

$$B = 2W(\beta_f + 1) = 2 \times 5000\,(8+1) = 90 \text{ KHz}.$$

Τέλος μαθήματος

- Ερωτήσεις?