K21 - Συστήματα Επικοινωνιών

4ο Εξάμηνο
Τομέας Γ' / Τμήμα Πληροφορικής και Επικοινωνιών
ΕΚΠΑ 2024-2025

Εισαγωγή στο μάθημα και βασικές έννοιες

Γιώργος Κανέλλος

Επίκουρος Καθηγητής
Τμήμα Πληροφορικής και Επικοινωνιών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
gtkanellos@di.uoa.gr

Βασικά Στοιχεία της Θεωρίας Σημάτων

- Κατηγορίες Σημάτων
- Ορισμοί και Βασικές Συναρτήσεις
- Μετασχηματισμός Fourier Συνεχούς Χρόνου
- Μετασχηματισμός Hilbert
- Ζωνοπερατά Σήματα

Κατηγορίες Σημάτων

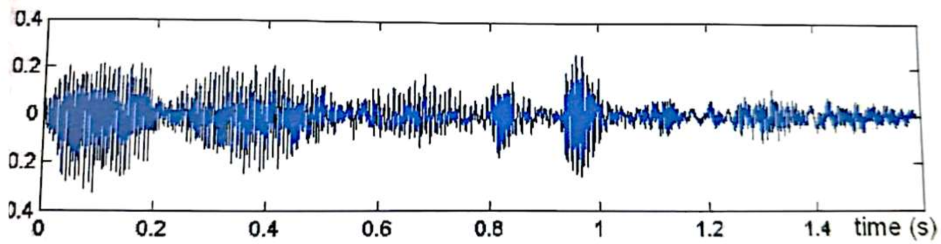
Κατηγορίες σημάτων

Σήμα

Μία μονοσήμαντη συνάρτηση χρόνου (ή κι άλλων μεταβλητών) η οποία φέρει πληροφορία.

Είδη Σημάτων

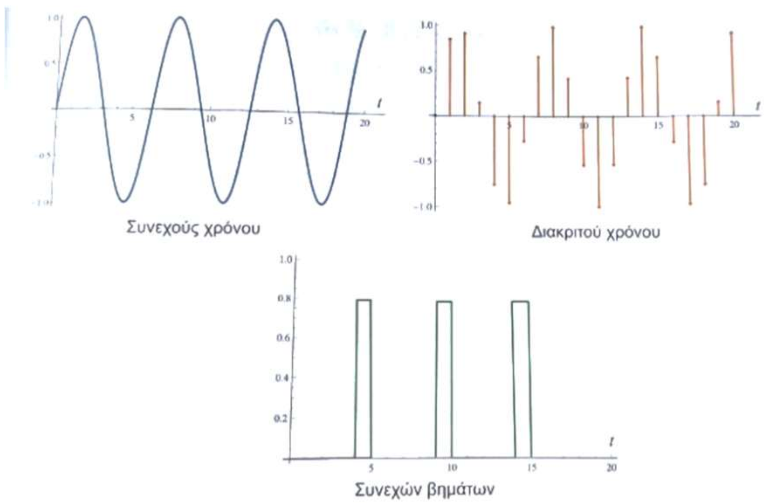
Αναλογικά (συνεχούς χρόνου)/ψηφιακά (διακριτά), περιοδικά/απεριοδικά, πραγματικά και μιγαδικά, αιτιατά και μη αιτιατά, άρτια/περιττά, αιτιοκρατικά (ντετερμινιστικά)/τυχαία, σήματα ενέργειας και σήματα ισχύος, ζωνοπερατά σήματα και σήματα βασικής ζώνη.



Σχήμα 2.1: Σήμα ομιλίας

Σήματα Συνεχούς και Διακριτού Χρόνου

- Τα *σήματα συνεχούς χρόνου* (*continuous time*) ορίζονται για κάθε χρονική στιγμή.
- Τα *σήματα διακριτού χρόνου* (*discrete time*) ορίζονται για διακριτές τιμές του χρόνου. Μπορεί να είναι πεπερασμένων τιμών (σύνηθες στα συστήματα επικοινωνιών) ή άπειρων τιμών.



Σχήμα 2.2: Σήματα συνεχούς, διακριτού χρόνου και συνεχών βημάτων

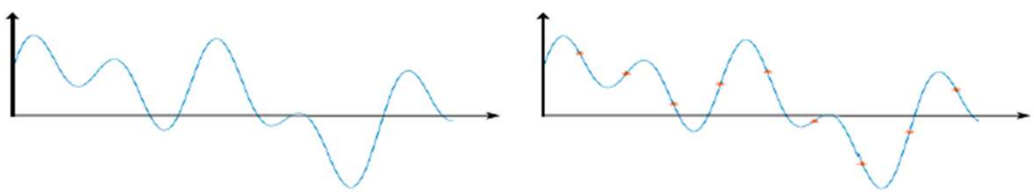
Σήματα Διακριτού Χρόνου (1/2)

- Ένα σήμα διακριτού χρόνου είναι μια διατεταγμένη ακολουθία (sequence) πραγματικών (πραγματικό σήμα) ή μιγαδικών (μιγαδικό σήμα) τιμών.
- Τα στοιχεία της ακολουθίας ονομάζονται δείγματα (samples).
- Ένα σήμα διακριτού χρόνου x είναι μια συνάρτηση της ακέραιας μεταβλητής n:

$$x \triangleq \{x[n]\}, \ -\infty < n < +\infty.$$

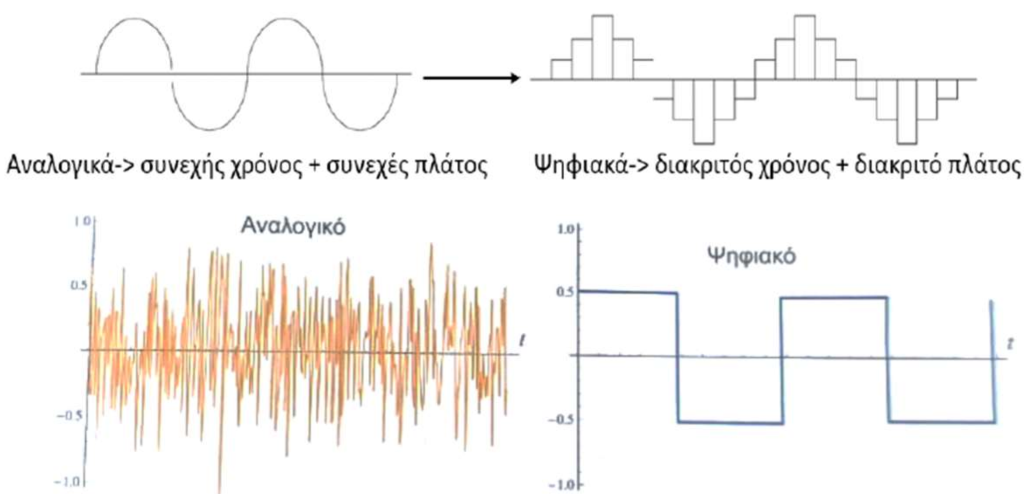
Σήματα Διακριτού Χρόνου (2/2)

- Σήματα διακριτού χρόνου προκύπτουν από πηγές διακριτής πληροφορίας (π.χ. συλλογή μετρήσεων αισθητήρα σε διακριτές χρονικές στιγμές).
- Σήματα διακριτού χρόνου προκύπτουν από δειγματοληψία *αναλογικών σημάτων (analog signals)*.



Αναλογικά και Ψηφιακά σήματα

- Παρόμοια η διαφορά τους με αυτή ανάμεσα στα συνεχή και διακριτά σήματα.
- Τα πρακτικά *ψηφιακά σήματα* (*digital signals*) παίρνουν τιμές σε διακεκριμένα πεπερασμένα σύνολα.



Σχήμα 2.3: Αναλογικά και ψηφιακά σήματα

Περιοδικά σήματα

- *Περιοδικά σήματα (periodic signals)* συνεχούς χρόνου είναι τα σήματα για τα οποία $\forall t$ και $\forall k \in \mathbb{N}$:

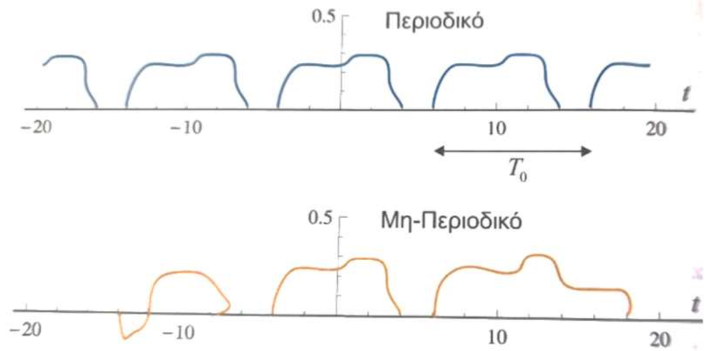
$$x(t) = x(t + kT),$$

με την παράμετρο T να καλείται *περίοδος* του σήματος.

- Για ένα περιοδικό σήμα διακριτού χρόνου με περίοδο $N \in \mathbb{N}$ δειγμάτων ισχύει $\forall n, k \in \mathbb{N}$:

$$x[n] = x[n + kN].$$

- Γενικά, απαιτείται προσοχή στη διάγνωση της περιοδικότητας σημάτων διακριτού χρόνου, πχ ένα ημίτονο διακριτού χρόνου είναι περιοδικό σήμα μόνο εάν η περίοδός του είναι θετικός ακέραιος αριθμός.



Σχήμα 2.4: Περιοδικό και μη-περιοδικό σήμα

Παράδειγμα συνθήκης περιοδικότητας συνεχούς χρόνου

$$s_1(t) = s_1(t + k_1 T_1)$$

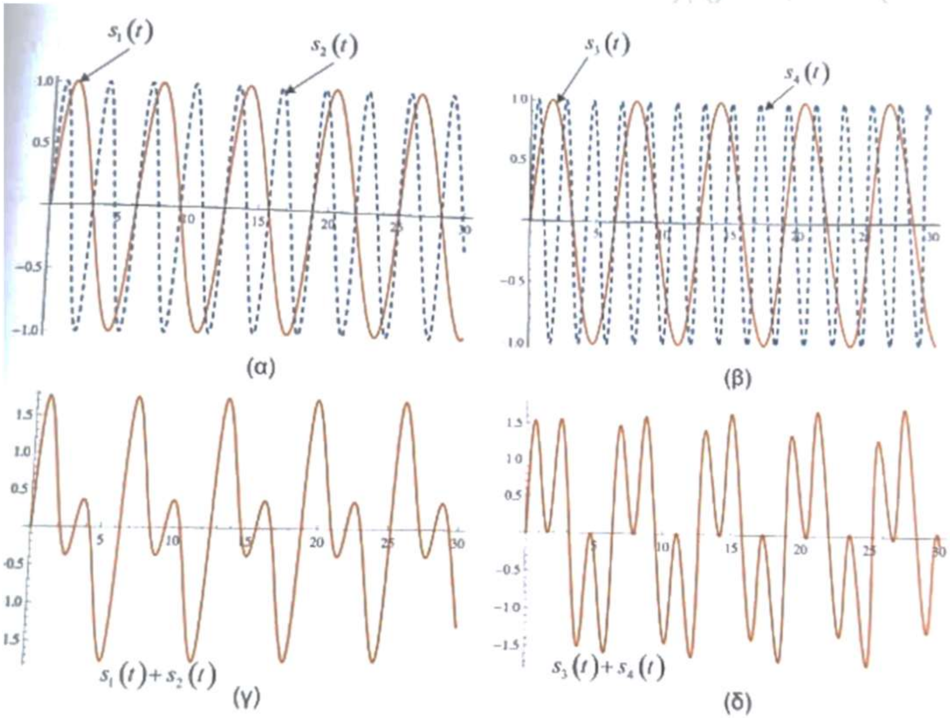
$$s_2(t) = s_2(t + k_2 T_2),$$

$$s(t) = s(t+T) \Rightarrow s_1(t) + s_2(t) = s_1(t+T) + s_2(t+T)$$

$$s_1(t + k_1 T_1) + s_2(t + k_2 T_2) = s_1(t+T) + s_2(t+T).$$

$$\boxed{k_1 T_1 = k_2 T_2 = T \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{k_2}{k_1}.}$$

Ο λόγος T1/T2 πρέπει να είναι ρητός



Σχήμα 2.5: Άθροισμα περιοδικών σημάτων (Παράδειγμα 2.1)

Παράδειγμα συνθήκης περιοδικότητας διακριτού χρόνου

- Έστω το ακόλουθο σήμα του διακριτού χρόνου n:

$$x[n] = \sin(\omega n), \ \omega = \frac{4\pi}{13}.$$

- Για να είναι περιοδικό σήμα το $x[n]$ με περίοδο N θα πρέπει:

$$x[n+N] = \sin(\omega n + \omega N)$$

και να ισχύει: $\omega N = 2\pi m, \ m \in \mathbb{Z}^+$.

- Δηλαδή, θα πρέπει το $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{N}{m}$ να είναι ρητός αριθμός.
- Θέτοντας $\omega = \frac{4\pi}{13}$ προκύπτει ότι $N = 6.5m$. Άρα, θέτοντας $m = 2$, προκύπτει ότι το $x[n]$ είναι περιοδικό με $N = 13$.

- Να εξεταστεί εάν το $x[n] = A\cos\left(\frac{n}{4}\right)$ είναι περιοδικό σήμα.

$$x(n) = A\cos\left(\frac{n}{4}\right)$$

$$x(n+KN) = \cancel{A\cos}\left(\frac{n+KN}{4}\right) = \cancel{A}\cos\left(\frac{n}{4}\right)$$

$$\frac{KN}{4} = 2\pi m \Rightarrow$$

$$N = \frac{2\pi m \cdot 4}{K}$$

$\in N$

$\in N$

Πραγματικά και Μιγαδικά Σήματα

- *Τα πραγματικά σήματα (real signals) παίρνουν πραγματικές τιμές.*
- *Τα μιγαδικά σήματα (complex signals) παίρνουν μιγαδικές τιμές.*
- *Τα μιγαδικά σήματα είναι χρήσιμα στα συστήματα επικοινωνιών καθώς περιέχουν διπλάσια πληροφορία (πλάτος και φάση).*
- *Κάθε μιγαδικό σήμα δύναται να αναπαρασταθεί ως άθροισμα δύο πραγματικών σημάτων ή σε πολικές συντεταγμένες (polar coordinates) περιέχοντας το πλάτος και φάση*

Πραγματικά και Μιγαδικά Σήματα

- *Τα πραγματικά σήματα (real signals) παίρνουν πραγματικές τιμές.*
- *Τα μιγαδικά σήματα (complex signals) παίρνουν μιγαδικές τιμές.*
- *Τα μιγαδικά σήματα είναι χρήσιμα στα συστήματα επικοινωνιών καθώς περιέχουν διπλάσια πληροφορία (πλάτος και φάση).*
- *Κάθε μιγαδικό σήμα δύναται να αναπαρασταθεί ως άθροισμα δύο πραγματικών σημάτων ή σε πολικές συντεταγμένες (polar coordinates) περιέχοντας το πλάτος και φάση*

Αναπαράσταση Μιγαδικών Σημάτων

- Έστω το σήμα $x(t) = Ae^{j2\pi f_c t}$ με $|x(t)| = A$ και $\theta(t) \triangleq 2\pi f_c t$.
- Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler:

$$x(t) = \underbrace{A\cos(2\pi f_c t)}_{\triangleq x_{\mathrm{I}}(t)} + j\,\underbrace{A\sin(2\pi f_c t)}_{\triangleq x_{\mathrm{Q}}(t)},$$

  $x_{\mathrm{I}}(t)$: συμφασική (in-phase) συνιστώσα.
  $x_{\mathrm{Q}}(t)$: ορθογώνια (quadrature) συνιστώσα.
- Το μέτρο του $x(t)$ προκύπτει ως:

$$|x(t)| = \sqrt{x_{\mathrm{I}}^2(t) + x_{\mathrm{Q}}^2(t)}.$$

- Η φάση του $x(t)$ προκύπτει ως:

$$\theta(t) = \tan^{-1}\left(\frac{x_{\mathrm{Q}}(t)}{x_{\mathrm{I}}(t)}\right).$$

IQ Αναπαράσταση Πραγματικών Σημάτων

- Έστω το σήμα $x(t) = A(t)\cos(2\pi f_c t + \theta(t))$.
- Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική σχέση $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$ προκύπτει:

$$x(t) = \underbrace{A(t)\cos(\theta(t))}_{\triangleq x_{\mathrm{I}}(t)}\cos(2\pi f_c t) - \underbrace{A(t)\sin(\theta(t))}_{\triangleq x_{\mathrm{Q}}(t)}\sin(2\pi f_c t)$$

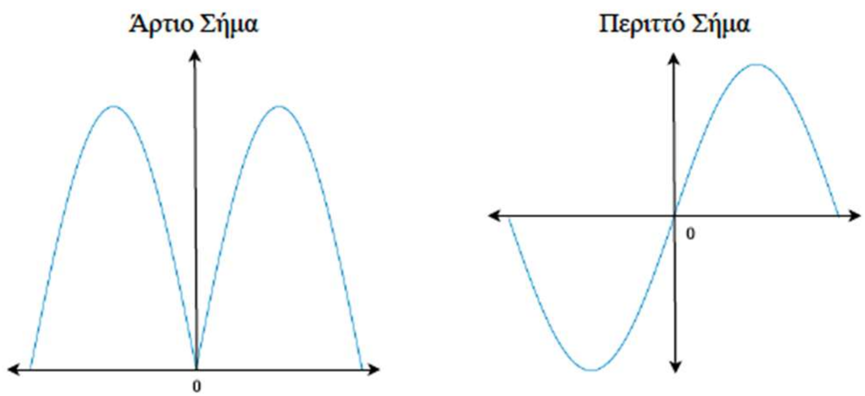
Άρτια και Περιττά Σήματα (1/2)

- Τα *άρτια σήματα* (*even signals*) παρουσιάζουν άρτια συμμετρία $\forall t$:

$$x(-t) = x(t).$$

- Τα *περιττά σήματα* (*odd signals*) παρουσιάζουν περιττή συμμετρία $\forall t$:

$$x(-t) = -x(t).$$



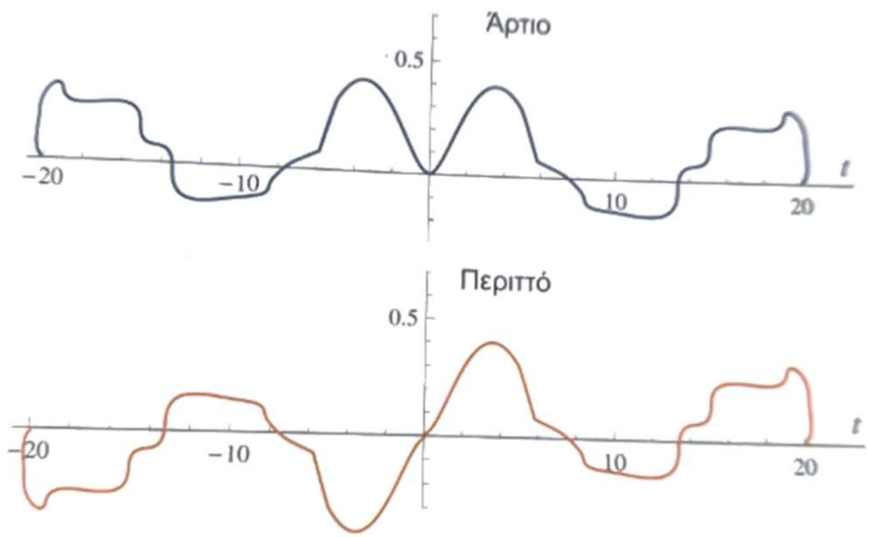
Άρτια και Περιττά Σήματα (2/2)

- Κάθε σήμα δύναται να εκφρασθεί ως άθροισμα ενός άρτιου $x_e(t)$ και ενός περιττού σήματος $x_o(t)$:

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t).$$

όπου:

$$x_e(t) = \frac{1}{2}\left(x(t) + x(-t)\right),$$
$$x_o(t) = \frac{1}{2}\left(x(t) - x(-t)\right).$$



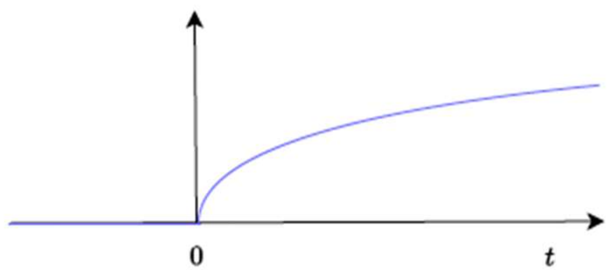
Σχήμα 2.7: Άρτιο και περιττό σήμα

Αιτιατά και Μη Σήματα

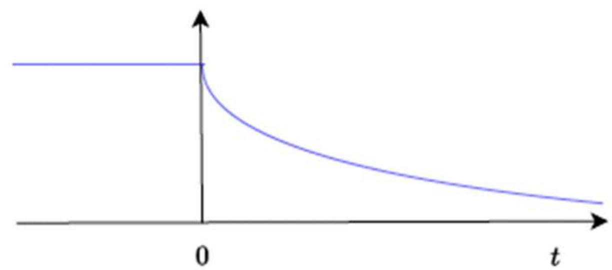
- Ένα σήμα λέγεται *αιτιατό* (*causal*) αν είναι μηδενικό για αρνητικές τιμές του χρόνου:

$$x(t) = 0 \quad \forall t < 0.$$

- Ειδάλλως, το σήμα είναι *μη αιτιατό* (*non causal*).



Αιτιατό



Μη Αιτιατό

Αιτιοκρατικά και Στοχαστικά Σήματα

- *Ένα αιτιοκρατικό σήμα (deterministic signal) είναι πλήρως καθορισμένο με τέτοιο τρόπο ώστε οι τιμές του να ορίζονται σε κάθε χρονική στιγμή με βεβαιότητα μέσω μιας μαθηματικής έκφρασης, ενός κανόνα ή ενός πίνακα τιμών.*

- *Τυχαίο ή στοχαστικό (random ή stochastic) είναι το σήμα για το οποίο υπάρχει αβεβαιότητα ως προς τη συμπεριφορά του, πχ ο θόρυβος στα συστήματα επικοινωνιών.*

Ορισμοί Ενέργειας και Ισχύος

- Η *ενέργεια (energy)* $\mathcal{E}_x$ ενός σήματος $x(t)$ ορίζεται ως:

$$\mathcal{E}_x = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt.$$

- Η *ισχύς (power)* $\mathcal{P}_x$ ενός σήματος $x(t)$ ορίζεται ως η ενέργεια ανά μονάδα χρόνου:

$$\mathcal{P}_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt.$$

- Όταν το $x(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο T_0:

$$\mathcal{P}_x = \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} |x(t)|^2 dt.$$

Σήματα Ενέργειας και Σήματα Ισχύος

- Τα *σήματα ενέργειας* (*energy signals*) $x(t)$ έχουν μη μηδενική πεπερασμένη ενέργεια:

$$0 < \mathcal{E}_x < \infty.$$

- Τα *σήματα ισχύος* (*power signals*) $x(t)$ έχουν μη μηδενική πεπερασμένη ισχύ:

$$0 < \mathcal{P}_x < \infty.$$

- Ένα σήμα είναι είτε σήμα ενέργειας είτε σήμα ισχύος είτε τίποτα από τα δύο (πχ σήμα ράμπας).
- Ένα σήμα με πεπερασμένη ενέργεια έχει μηδενική ισχύ κι ένα σήμα με πεπερασμένη ισχύ έχει άπειρη ενέργεια.
- Συνήθως, στις τηλεπικοινωνίες παράγονται σήματα ενέργειας (στα μοντέλα θεωρούνται ως σήματα ισχύος).

Ημιτονοειδή Σήματα (1/3)

Άσκηση 1

Να δειχθεί ότι το σήμα $x(t) = A\cos(2\pi f_c t)$ έχει ενέργεια $\mathcal{E}_x = \infty$ και ισχύ $\mathcal{P}_x = \frac{A^2}{2}$, άρα ότι πρόκειται για σήμα ισχύος.

Άσκηση 2

Ποια η ισχύς του σήματος $x(t) = A\cos(2\pi f_1 t) + B\cos(2\pi f_2 t)$;

Ημιτονοειδή Σήματα (2/3)

- Η περίοδος του $x(t) = A\cos(2\pi f_c t)$ είναι η $T_c = f_c^{-1}$.
- Επίσης, ισχύει ότι: $\cos^2(2\pi f_c t) = \frac{1+\cos(4\pi f_c t)}{2}$.
- Συνεπώς, η ενέργειά του υπολογίζεται ως:

$$\mathcal{E}_x = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} A^2 \cos^2(2\pi f_c t) dt \Rightarrow$$

$$\mathcal{E}_x = A^2 \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(4\pi f_c t)}{2}\right) dt \Rightarrow$$

$$\mathcal{E}_x = A^2 \left(\frac{1}{2} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} dt + \frac{1}{2} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \cos(4\pi f_c t) dt\right) \Rightarrow$$

$$\mathcal{E}_x = \lim_{T\to\infty} A^2 T + 0 = \infty.$$

Ημιτονοειδή Σήματα (3/3)

- Η ισχύς του $x(t)$ του υπολογίζεται ως:

$$\mathcal{P}_x = \frac{1}{2T_c}\int_{-T_c}^{T_c} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2T_c}\int_{-T_c}^{T_c} A^2\cos^2(2\pi f_c t)dt \Rightarrow$$

$$\mathcal{P}_x = \frac{A^2}{2T_c}\int_{-T_c}^{T_c}\left(\frac{1}{2}+\frac{cos(4\pi f_c t)}{2}\right)dt \Rightarrow$$

$$\mathcal{P}_x = \frac{A^2}{2T_c}\frac{T_c-(-T_c)}{2} + \frac{A^2}{4T_c}\underbrace{\int_{-T_c}^{T_c}\cos(4\pi f_c t)\,dt}_{=0} = \frac{A^2}{2}.$$

Τιμές DC και RMS

- Ως *τιμή DC (Direct Current)* ενός σήματος $x(t)$ ορίζεται η μέση τιμή του στο χρόνο:

$$R_x^{\mathrm{DC}} \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)dt.$$

- Όταν το $x(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο T_0 τότε η DC τιμή του υπολογίζεται ως:

$$R_x^{\mathrm{DC}} \triangleq \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} x(t)dt.$$

- Ως *τιμή RMS (Root Mean Square)* ενός σήματος $x(t)$ ορίζεται η τετραγωνική ρίζα της ισχύος του:

$$R_x^{\mathrm{RMS}} = \sqrt{P_x}.$$

Άσκηση 3

Άσκηση 3

Να εξεταστεί εάν το σήμα $x(t) = Ae^{-\alpha t}u(t)$, όπου $u(t)$ η βηματική συνάρτηση, είναι σήμα ενέργειας ή ισχύος.

Η Μοναδιαία Κρουστική Συνάρτηση δ(t)

— Αν θέλαμε να περιγράψουμε ένα παλμό απειροστά μικρής διάρκειας ϵ, αλλά με σταθερό μοναδιαίο “εμβαδό”, τι θα κάναμε;

— Κάτι τέτοιο θα μπορούσε να περιγράψει ένα σήμα που μοντελοποιεί ένα «ακαριαίο» συμβάν, που «χτυπά κι εξαφανίζεται» ακαριαία.

— Θα δημιουργούσαμε τον τετραγωνικό παλμό ως

$$p(t) = \frac{1}{\epsilon}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\epsilon}\right) \qquad \lim_{\epsilon\to 0} p(t)$$

διάρκειας ϵ και πλάτους 1/ϵ, και θα παίρναμε το όριο για ε τείνει στο 0.

Η Μοναδιαία Κρουστική Συνάρτηση δ(t)

$$p(t) = \frac{1}{\epsilon}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\epsilon}\right) \qquad \lim_{\epsilon \to 0} p(t)$$

— Αυτός ο παλμός θα είχε απειροστά μικρή διάρκεια ϵ και απειροστά μεγάλο πλάτος 1/ϵ

— Όμως η επιφάνεια κάτω από τη συνάρτηση θα εξακολουθούσε να είναι μοναδιαία.

Η Μοναδιαία Κρουστική Συνάρτηση δ(t)

— Ένας τέτοιος «περίεργος» τετραγωνικός παλμός θα ικανοποιούσε δυο ιδιότητες:

$$p(t) = 0, \quad t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)dt = 1$$

όταν ε→0

— Οποιοδήποτε σήμα ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες ονομάζεται κρουστική συνάρτηση Δέλτα – ή απλά συνάρτηση Δέλτα στο εξής – και συμβολίζεται ως δ(t)

—Η συνάρτηση Δέλτα ΔΕΝ είναι συνάρτηση – είναι κατανομή ή γενικευμένη συνάρτηση!

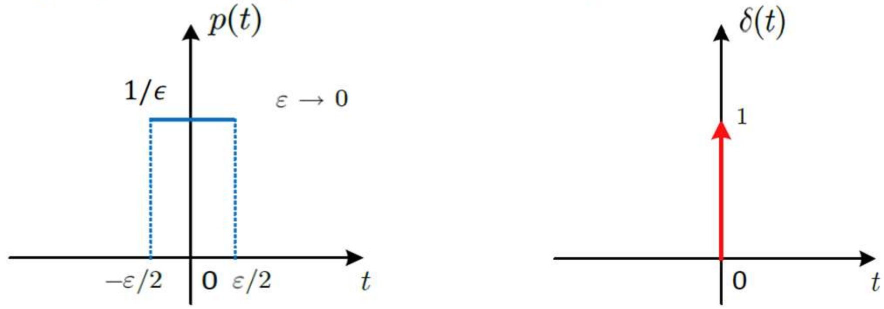
Η Μοναδιαία Κρουστική Συνάρτηση δ(t)

— Η συνάρτηση Δέλτα, λοιπόν, ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ +\infty, & t = 0 \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

$$\delta(-t) = \delta(t) \qquad \delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t), \quad a \neq 0$$

— Σχηματικά, η προσέγγιση της συνάρτησης Δέλτα από τον τετραγωνικό παλμό και η συνάρτηση Δέλτα φαίνονται παρακάτω



Η Μοναδιαία Κρουστική Συνάρτηση δ(t)

- Η *μοναδιαία κρουστική συνάρτηση ή συνάρτηση Dirac*:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}.$$

- Εναλλακτικά, $\forall f(t)$ με τιμές στο $\mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-\tau)dt = f(\tau) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

- Αντιπροσωπευτικές ιδιότητες:

$$\delta(t) = \delta(-t), \quad |\alpha|\delta(t) = \delta\left(\frac{t}{\alpha}\right), \alpha \neq 0,$$

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ft}dt = 1,$$

$$\mathcal{F}\{1\} = \delta(f) = \delta(-f), \quad \mathcal{F}\{e^{\pm j2\pi f_0 t}\} = \delta(f \mp f_0),$$

όπου $\mathcal{F}\{\cdot\}$ ο μετασχηματισμός Fourier συνεχούς χρόνου.

Τέλος μαθήματος

- Ερωτήσεις?