K21 - Συστήματα Επικοινωνιών

4ο Εξάμηνο
Τομέας Γ’ / Τμήμα Πληροφορικής και Επικοινωνιών
ΕΚΠΑ 2024-2025

Εισαγωγή στο μάθημα και βασικές έννοιες

Γιώργος Κανέλλος

Επίκουρος Καθηγητής
Τμήμα Πληροφορικής και Επικοινωνιών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
gtkanellos@di.uoa.gr

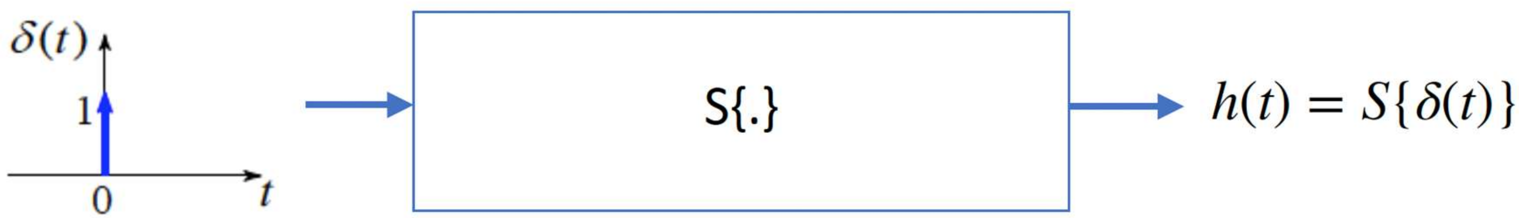
Συστήματα Επικοινωνιών

Βασικά Στοιχεία της Θεωρίας Σημάτων

- Κατηγορίες Σημάτων
- Ορισμοί και Βασικές Συναρτήσεις
- Μετασχηματισμός Fourier Συνεχούς Χρόνου
- Μετασχηματισμός Hilbert
- Ζωνοπερατά Σήματα

Κρουστική απόκριση

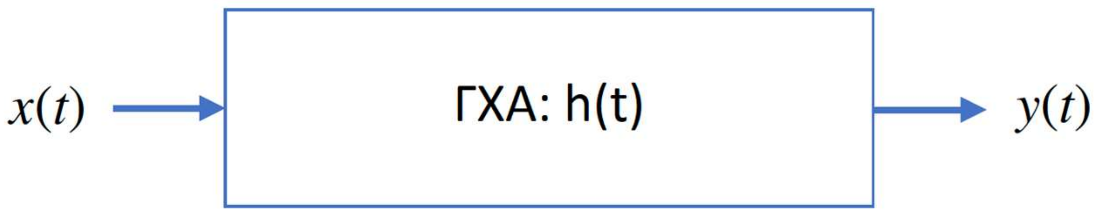
— Η κρουστική απόκριση (impulse response) είναι η έξοδος ενός συστήματος όταν στην είσοδο του εμφανίζεται η κρουστική συνάρτηση Δέλτα και συμβολίζεται με h(t).



— Αν το σύστημα είναι ΓΧΑ τότε αυτό περιγράφεται πλήρως από την κρουστική απόκριση h(t).

Απόκριση συστήματος μέσω συνέλιξης

— Σύστημα: μετασχηματισμός μεταξύ σημάτων



— Η έξοδος y(t) ενός ΓΧΑ συστήματος περιγράφεται με απλό τρόπο από την πράξη της συνέλιξης (convolution) μεταξύ δυο σημάτων: α) της εισόδου x(t) και β) της κρουστικής απόκρισης h(t) του συστήματος.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Συνέλιξη

- Η *γραμμική συνέλιξης (convolution)* είναι εξαιρετικά σημαντική στα συστήματα επικοινωνιών και στη θεωρία Fourier.
- Αν η είσοδος σε ένα *γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο (linear and time invariant)* σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$ είναι το σήμα $x(t)$ τότε η έξοδός του προκύπτει ως:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau.$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

Ενδεικτικές Ιδιότητες

— Ταυτοτική ιδιότητα - ουδέτερο στοιχείο

$$x(t) * h(t) = y(t) \longrightarrow \delta(t) * h(t) = h(t)$$

$$x(t) = \delta(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = h(t)$$

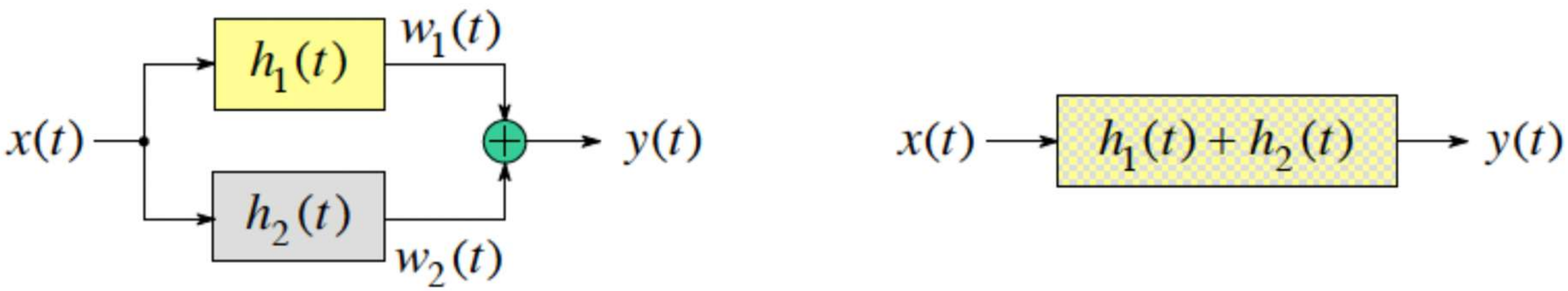
$$x(t-t_0) = \delta(t-t_0) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t-t_0) = h(t-t_0)$$

$$h(t) * \delta(t-t_0) = h(t-t_0) \qquad \text{γενικά} \qquad x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$$

Ενδεικτικές Ιδιότητες

— Επιμεριστική ιδιότητα

$$h_1(t) * x(t) + h_2(t) * x(t) = \left[h_1(t) + h_2(t)\right] * x(t)$$



Η φυσική σημασία της επιμεριστικής ιδιότητας της συνέλιξης

Ενδεικτικές Ιδιότητες

- Για τη συνέλιξη ισχύουν η προσεταιριστική κι η αντιμεταθετική ιδιότητα, αντίστοιχα:

$$(z(t) * x(t)) * y(t) = z(t) * (x(t) * y(t)),$$
$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t).$$

Άσκηση 4

Να υπολογιστεί η συνέλιξη των ακόλουθων σημάτων:

$$x_1(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}, \quad x_2(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ -1, & 1 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}.$$

Λύσης της Άσκησης 4 (1/2)

- Από τον ορισμό του $x_1(t)$ προκύπτει ότι:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{1} x_2(t-\tau)d\tau.$$

- Με την αλλαγή μεταβλητής $\kappa = t - \tau$ προκύπτει:

$$y(t) = \int_{t-1}^{t} x_2(\kappa)d\kappa.$$

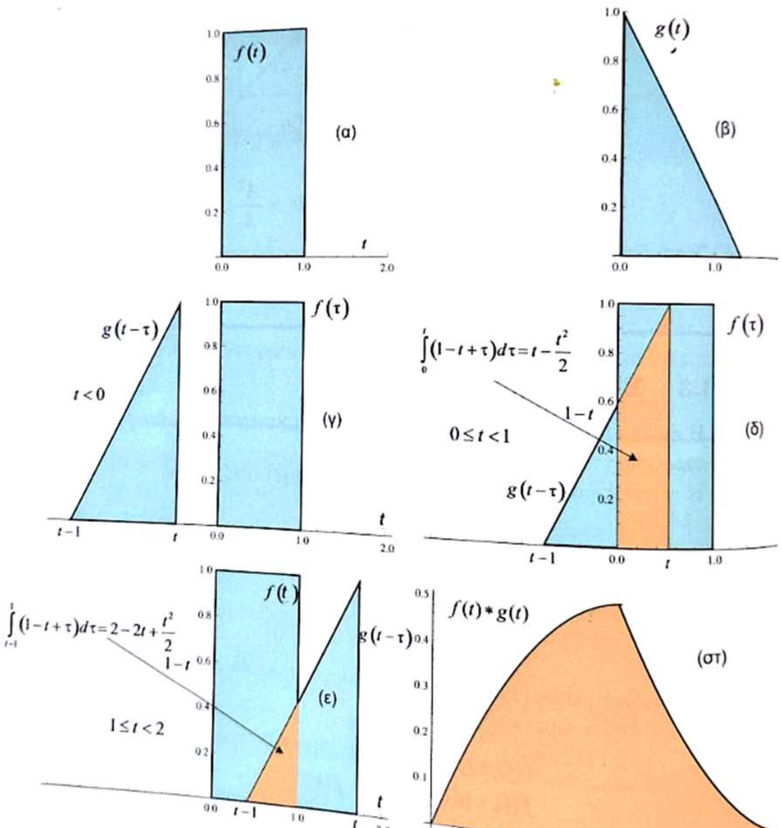
- Διακρίνονται οι περιπτώσεις:
  - $t \in (-\infty, 0] \cup [3, \infty)$: $y(t) = \int_{t-1}^{t} 0 d\kappa = 0.$
  - $t \in [0, 1]$: $y(t) = \int_{0}^{t} 1 d\kappa = t.$
  - $t \in [1, 2]$: $y(t) = \int_{t-1}^{1} 1 d\kappa + \int_{1}^{t} (-1) d\kappa = 3 - 2t.$
  - $t \in [2, 3]$: $y(t) = \int_{t-1}^{2} (-1) d\kappa = t - 3.$

Λύσης της ΄Ασκησης 4 (2/2)

- Συνοψίζοντας:

$$y(t) = \begin{cases} t, & t \in [0,1] \\ 3-2t, & t \in [1,2] \\ t-3, & t \in [2,3] \\ 0, & t \in (-\infty, 0] \cup [3, \infty) \end{cases} .$$

Παράδειγμα συνέλιξης



Σχήμα 2.10: Συνέλιξη σημάτων (Παράδειγμα 2.8)

Περιγραφή σήματος στο πεδίο του χρόνου και της συχνότητας

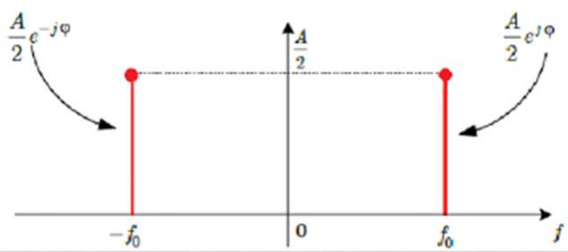
— Περισσότερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το σήμα:

$$x(t) = A\cos\left(2\pi f_0 t + \varphi\right), \quad A > 0, \quad \phi \in (-\pi, \pi]$$

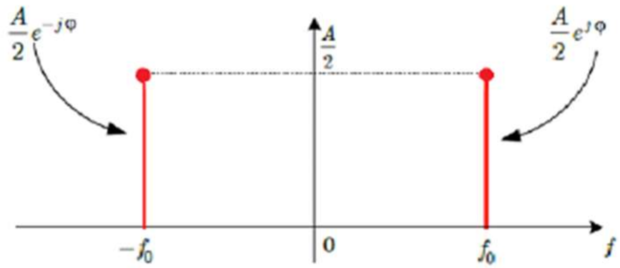
Το οποίο αξιοποιώντας τη σχέση του Euler, γράφεται ως:

$$x(t) = A\cos\left(2\pi f_0 t + \varphi\right) = \boxed{\frac{A}{2}e^{j\phi}}\, e^{j2\pi f_0 t} + \boxed{\frac{A}{2}e^{-j\phi}}\, e^{-j2\pi f_0 t}$$

— Η αναπαράσταση του στο πεδίο της συχνότητας θα είναι:



Περιγραφή σήματος στο πεδίο του χρόνου και της συχνότητας



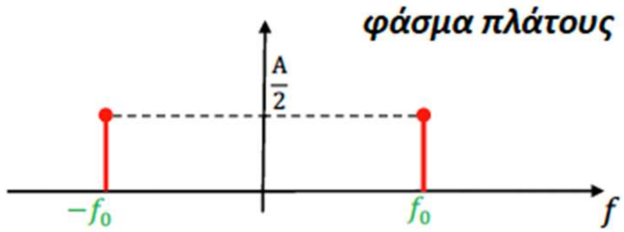
— Η παραπάνω αναπαράσταση ονομάζεται φάσμα (spectrum).

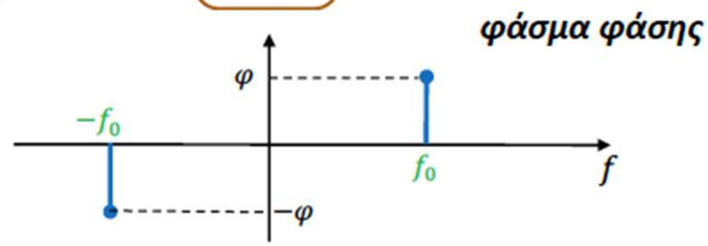
— Ωστόσο, είναι προτιμότερο το μέτρο του φάσορα να σχεδιάζεται σε μια γραφική παράσταση ενώ η φάση του σε μια άλλη:

- Στο φάσμα πλάτους σχεδιάζουμε το μέτρο του φάσορα.
- Στο φάσμα φάσης σχεδιάζουμε τη φάση του φάσορα.

Περιγραφή σήματος στο πεδίο του χρόνου και της συχνότητας

$$x(t) = A\cos\left(2\pi f_0 t + \varphi\right) = \boxed{\frac{A}{2}e^{j\phi}} e^{j2\pi f_0 t} + \boxed{\frac{A}{2}e^{-j\phi}} e^{-j2\pi f_0 t}$$



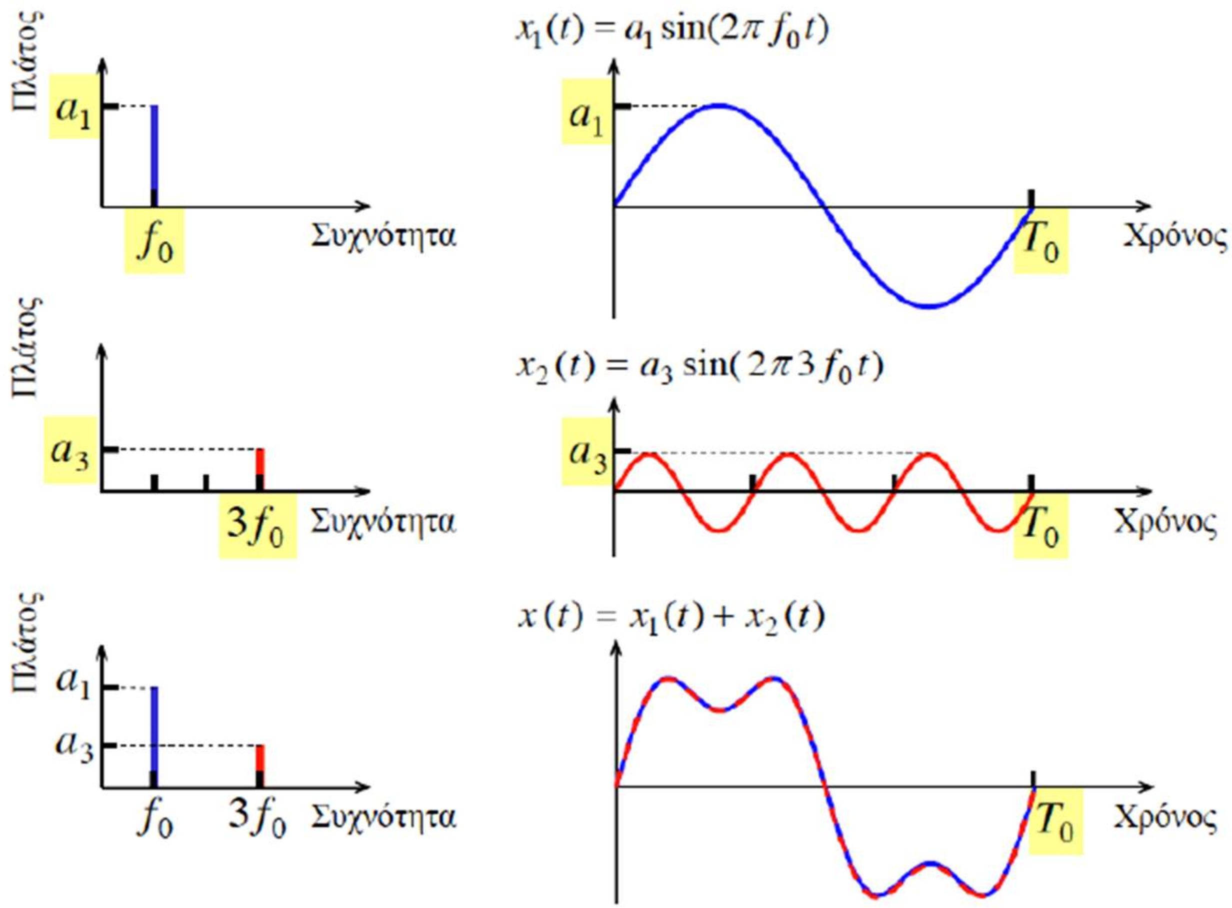


— Κάθε πραγματικό σήμα που αναλύεται φασματικά έχει τις ακόλουθες συμμετρίες:

1) Άρτια συμμετρία στο φάσμα πλάτους του
2) Περιττή συμμετρία στο φάσμα φάσης του

— Η συμμετρία προκύπτει από τη συζυγία των φασόρων.

Περιγραφή σήματος στο πεδίο του χρόνου και της συχνότητας



Απόκριση ΓΧΑ συστημάτων σε μιγαδικό εκθετικό σήμα

Έστω εκθετικό σήμα της μορφής

$$x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}, \quad A > 0$$

— Αν βάλουμε ένα τέτοιο σήμα ως είσοδο σε ένα ΓΧΑ σύστημα τότε θα έχουμε:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) A e^{j(2\pi f_0 (t-\tau)+\phi)}\, d\tau \qquad = Ae^{j(2\pi f_0 t+\phi)} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau}\, d\tau$$

Θέτουμε $H(f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau$

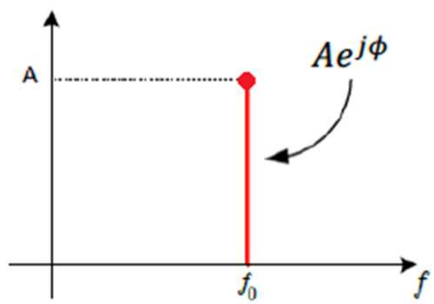
$$= H(f_0)\left(Ae^{j(2\pi f_0 t+\phi)}\right)$$

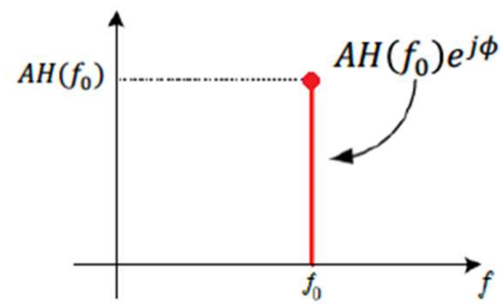
$$= H(f_0)x(t)$$

Απόκριση ΓΧΑ συστημάτων σε μιγαδικό εκθετικό σήμα

$$x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \phi)} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = H(f_0)\, Ae^{j(2\pi f_0 t + \phi)}$$

$$H(f_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j2\pi f_0 t} dt$$





Απόκριση ΓΧΑ συστημάτων σε μιγαδικό εκθετικό σήμα

— Το αποτέλεσμα $y(t) = H\left(f_0\right) x(t)$

με $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}, \quad A > 0$ και $H\left(f_0\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau$

είναι πολύ σημαντικό!

— Μας λέει ότι ένα μιγαδικό σήμα της παραπάνω μορφής περνά «όπως είναι» στην έξοδο του συστήματος και απλά πολλαπλασιάζεται με μια μιγαδική σταθερά H(f_0), η οποία μπορεί να τροποποιήσει το πλάτος και τη φάση του σήματος εισόδου.

— Δε θα ήταν πολύ βολικό να μπορούμε να εκφράσουμε κάθε σήμα ως άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων συγκεκριμένων συχνοτήτων;

Τότε θα βρίσκαμε την έξοδο ΓΧΑ συστημάτων για τέτοιες εισόδους πολύ εύκολα!

Απόκριση ΓΧΑ συστημάτων σε μιγαδικό εκθετικό σήμα

— Το αποτέλεσμα $y(t) = H\left(f_0\right) x(t)$

με $x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \varphi)}$, $A > 0$ και $H\left(f_0\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 \tau} d\tau$

είναι πολύ σημαντικό!

— Μας λέει ότι ένα μιγαδικό σήμα της παραπάνω μορφής περνά «όπως είναι» στην έξοδο του συστήματος και απλά πολλαπλασιάζεται με μια μιγαδική σταθερά H(f_0), η οποία μπορεί να τροποποιήσει το πλάτος και τη φάση του σήματος εισόδου.

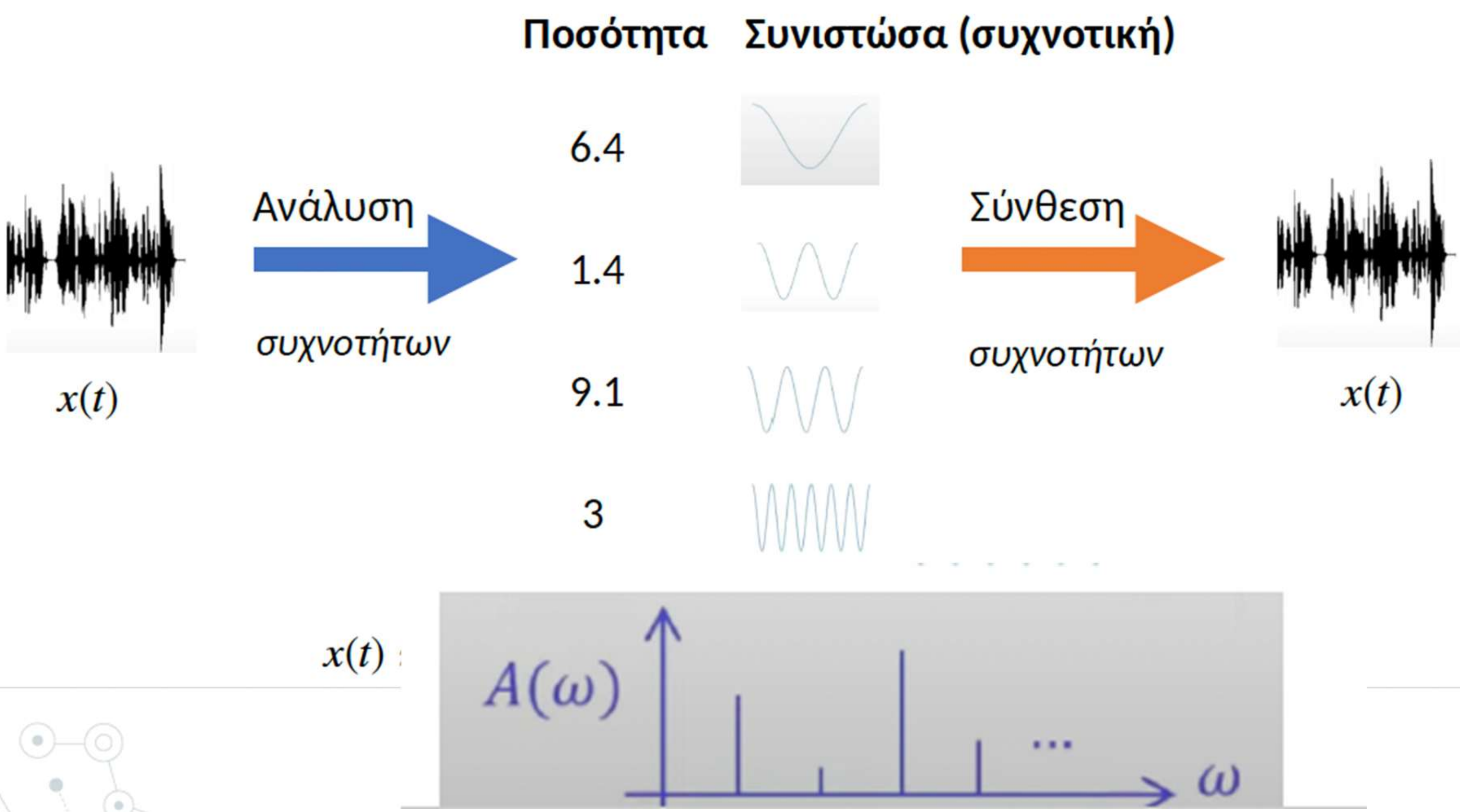
— Δε θα ήταν πολύ βολικό να μπορούμε να εκφράσουμε κάθε σήμα ως άθροισμα μιγαδικών εκθετικών σημάτων συγκεκριμένων συχνοτήτων;

Τότε θα βρίσκαμε την έξοδο ΓΧΑ συστημάτων για τέτοιες εισόδους πολύ εύκολα!

Απόκριση ΓΧΑ συστημάτων σε μιγαδικό εκθετικό σήμα

— **Εναλλακτική διατύπωση:** *Μπορούμε να προσεγγίσουμε όσο καλά θέλουμε ένα οποιοδήποτε περιοδικό και πραγματικό σήμα από ένα άθροισμα ημιτόνων (και μέσω της σχέσης του Euler, συζυγών μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων);*

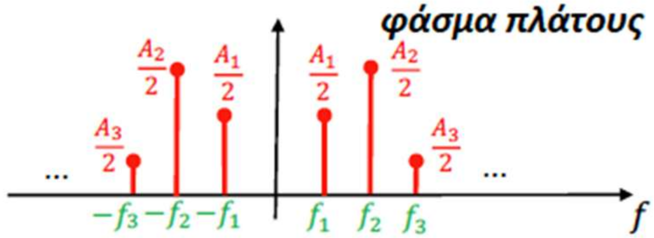
Ανάλυση και Σύνθεση Σημάτων

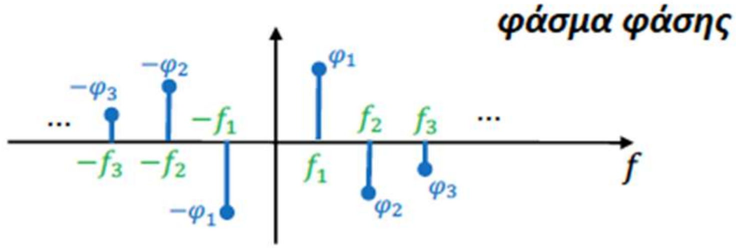


Σήμα ως γραμμικός συνδυασμός σημάτων απλής συχνότητας

Περιγραφή σήματος στο πεδίο του χρόνου και της συχνότητας

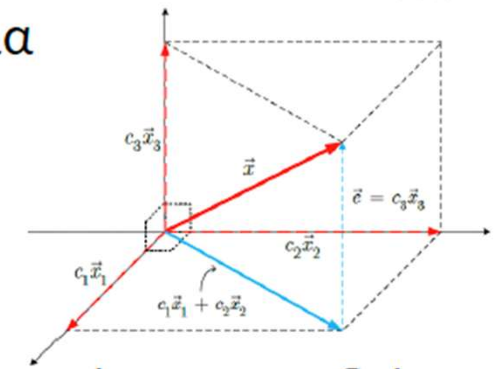
$$x(t) = \sum_k A_k \cos\left(2\pi f_k t + \varphi_k\right) = \sum_k \left[\frac{A_k}{2} e^{j\varphi_k} e^{j2\pi f_k t} + \frac{A_k}{2} e^{-j\varphi_k} e^{-j2\pi f_k t}\right]$$





Ορθογώνια σήματα

— Στον 3D χώρο, χρειαζόμαστε τρία διανύσματα για να περιγράψουμε ένα σημείο του χώρου



— Ποια είναι τα κατάλληλα διανύσματα ώστε να περιγράφουμε το διάνυσμα $\vec{x}$ πλήρως και ακριβώς;

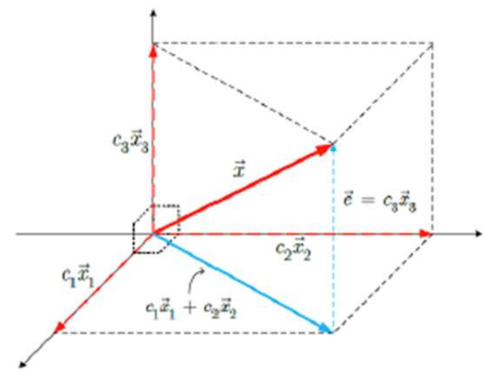
Ένα τέτοιο σύνολο είναι το: $x_1 = [1{,}0{,}0], \quad x_2 = [0{,}1{,}0], \quad x_3 = [0{,}0{,}1]$

Ορθογώνια σήματα

— Τι χαρακτηριστικά έχουν τα παραπάνω διανύσματα (ή όποια άλλα, αν υπάρχουν) που τα κάνουν κατάλληλα να αναπαριστούν χωρίς σφάλμα (δηλ. ακριβώς);

1) Είναι ορθογώνια δηλαδή το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = |\vec{x}|\,|\vec{y}|\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$



—Από τη γραμμική άλγεβρα ξέρουμε ότι ορθογωνιότητα συνεπάγεται γραμμική ανεξαρτησία.

—Γραμμική ανεξαρτησία σημαίνει ότι κανένα από αυτά δεν μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Ορθογώνια σήματα

— Δύο μη μηδενικά σήματα x(t) και y(t) λέγονται ορθογώνια αν και μόνο αν το εσωτερικό τους γινόμενο ισούται με μηδέν.

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_a^b x(t) y^*(t) dt = 0$$

— Θα προσδιορίσουμε το εσωτερικό γινόμενο των σημάτων $e^{jk\omega_0 t}, e^{jm\omega_0 t}$

$$\left\langle e^{jk\omega_0 t}, e^{jm\omega_0 t} \right\rangle = \int_0^T e^{jk\omega_0 t} \cdot e^{-jm\omega_0 t} dt = \int_0^T e^{j(k-m)\omega_0 t} dt$$

DEPARTMENT OF INFORMATICS & TELECOMMUNICATIONS

HELLENIC REPUBLIC
National and Kapodistrian
University of Athens
EST. 1837

Ορθογώνια σήματα

—Όταν $k \neq m$

$$\left\langle e^{jk\omega_0 t}, e^{jm\omega_0 t} \right\rangle = \int_0^T e^{jk\omega_0 t} \cdot e^{-jm\omega_0 t} dt = \int_0^T e^{j(k-m)\omega_0 t} dt = \frac{1}{j(k-m)\omega_0} e^{j(k-m)\omega_0 t} \Big|_0^T$$

$$= \frac{1}{j(k-m)\omega_0} \left[e^{j(k-m)\frac{2\pi}{T}T} - e^0 \right] = 0$$

Πράγματι, αξιοποιώντας την εξίσωση του Euler:

$$e^{j(k-m)2\pi} = \cos((k-m)2\pi) - j\sin((k-m)2\pi) = 1 + j0$$

Ορθογώνια σήματα

—Όταν $k = m$

$$\left\langle e^{jk\omega_0 t}, e^{jm\omega_0 t} \right\rangle = \int_0^T e^{j0\omega_0 t} dt = \int_0^T dt = T$$

Συνεπώς,

$$\left\langle e^{jk\omega_0 t}, e^{jm\omega_0 t} \right\rangle = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ T, & k = m \end{cases} = T\delta(k-m)$$

— Παρατηρούμε ότι το εσωτερικό γινόμενο των μιγαδικών σημάτων απλής συχνότητας είναι ίσο με μηδέν για k διαφορετικό από m, επομένως τα σήματα είναι ορθογώνια και σχηματίζουν ένα σύνολο ορθογώνιων σημάτων.

Το σύνολο των ορθογώνιων αναλογικών εκθετικών σημάτων

Για τα εκθετικά σήματα $e^{jk\omega_0 t}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, παρατηρούμε

$$\left\langle e^{jk\omega_0 t}, e^{jm\omega_0 t} \right\rangle = \int_0^T e^{jk\omega_0 t} \cdot e^{-jm\omega_0 t}\, dt = T \cdot \delta(k-m)$$

Τα εκθετικά σήματα $e^{jk\omega_0 t}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, σε οποιοδήποτε πεπερασμένο χρονικά διάστημα $[t_0, t_0 + T]$, διάρκειας $T = 2\pi/\omega_0$, καλούνται ***αρμονικά συσχετιζόμενα εκθετικά σήματα*** και σχηματίζουν ένα ***ορθογώνιο σύνολο σημάτων***.

Επομένως κάθε σήμα $x(t)$ στο χρονικό αυτό διάστημα εκφράζεται

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk\omega_0 t}}$$

Το σύνολο των ορθογώνιων αναλογικών εκθετικών σημάτων

Έστω τώρα ένα σήμα $x(t)$ στο διάστημα $[t_0,\ t_0 + T]$, και ας υποθέσουμε ότι είναι δυνατόν να αναπτυχθεί σε άθροισμα εκθετικών στοιχειωδών σημάτων,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

Θα υπολογίσουμε τους συντελεστές a_k Πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη με $e^{-jn\omega_0 t}$

$$x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t} \cdot e^{-jn\omega_0 t}$$

και ολοκληρώνουμε από t_0 έως $t_0 + T$,

$$\int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t}\, dt = \int_{t_0}^{t_0+T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t} \cdot e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{t_0}^{t_0+T} e^{jk\omega_0 t} \cdot e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left\langle e^{jk\omega_0 t},\ e^{jn\omega_0 t} \right\rangle$$

Το σύνολο των ορθογώνιων αναλογικών εκθετικών σημάτων

$$\left\langle e^{jk\omega_0 t}, e^{jn\omega_0 t}\right\rangle = \int_0^T e^{jk\omega_0 t}\cdot e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ T, & k = n \end{cases} = T\cdot\delta(n-n)$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left\langle e^{jk\omega_0 t},\, e^{jn\omega_0 t}\right\rangle$$

$$= \cdots a_{n-1}\underbrace{\overbrace{\left\langle e^{j(n-1)\omega_0 t}, e^{jn\omega_0 t}\right\rangle}^{k=n-1}}_{=0} + a_n\underbrace{\overbrace{\left\langle e^{jn\omega_0 t}, e^{jn\omega_0 t}\right\rangle}^{k=n}}_{=T} + a_{n+1}\underbrace{\overbrace{\left\langle e^{j(n+1)\omega_0 t}, e^{jn\omega_0 t}\right\rangle}^{k=n+1}}_{=0}\cdots$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}dt = T\cdot a_n \quad \Longrightarrow \quad \boxed{a_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\cdot e^{-jn\omega_0 t}\,dt}$$

Εκθετική σειρά Fourier (Ανάπτυγμα Fourier)

— Ένα περιοδικό σήμα x(t) με περίοδο T_0 μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός αρμονικά συσχετισμένων σημάτων με τους εξής τρόπους:

Εξίσωση σύνθεσης

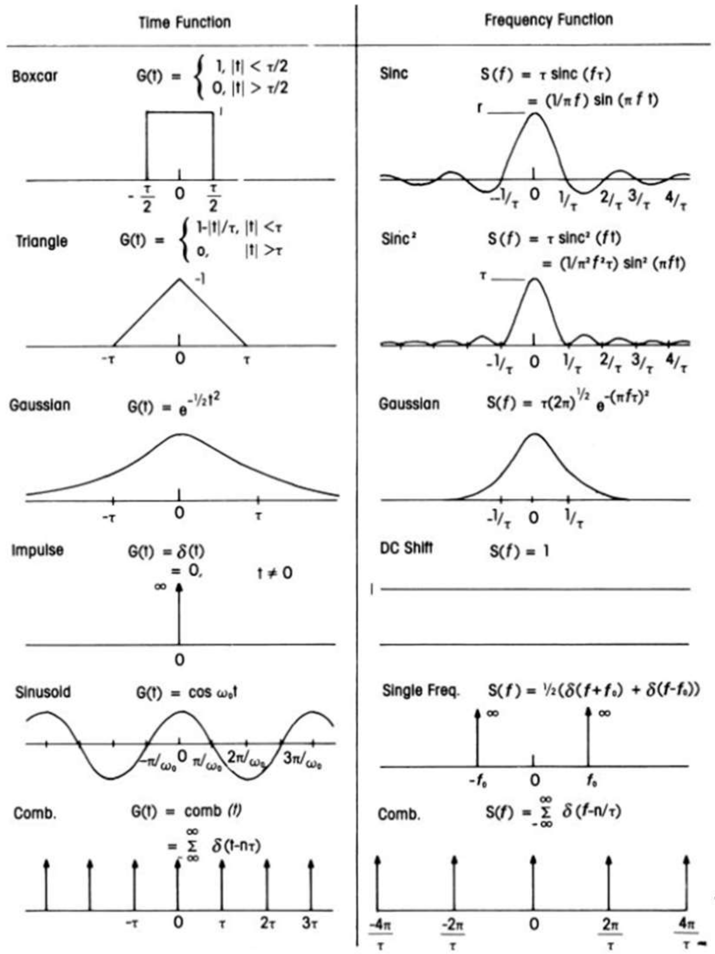
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Εξίσωση Ανάλυσης

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

— Οι συντελεστές της εκθετική σειράς είναι μιγαδικοί αριθμοί:
- — Πλάτος: |a_k| εκφράζει το μέτρο του μιγαδικού συντελεστή a_k.
- — Φάση: φk = angle(a_k) εκφράζει τη γωνία του μιγαδικού a_k.
- — a_k = |a_k|e^(jφ_k) - πολική μορφή του συντελεστή.

Μετασχηματισμοί fourier βασικών συναρτήσεων



Τέλος μαθήματος

- Ερωτήσεις?