K21 - Συστήματα Επικοινωνιών

4ο Εξάμηνο
Τομέας Γ’ / Τμήμα Πληροφορικής και Επικοινωνιών
ΕΚΠΑ 2024-2025
Μετασχηματισμός Fourier

Γιώργος Κανέλλος

Επίκουρος Καθηγητής
Τμήμα Πληροφορικής και Επικοινωνιών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
gtkanellos@di.uoa.gr

Διάρθρωση μαθήματος

- Ανασκόπηση σειρών Fourier
- Μετασχηματισμός Fourier
- Βασικές ιδιότητες Μετασχηματισμού Fourier
- Θεώρημα Parseval
- Συσχέτιση και Αυτόσυσχέτιση

Ανασκόπηση Σειρών Fourier

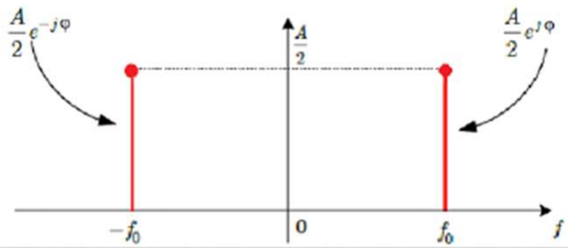
— Περισσότερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το σήμα:

$$x(t) = A\cos\left(2\pi f_0 t + \varphi\right), \quad A > 0, \quad \phi \in (-\pi, \pi]$$

Το οποίο αξιοποιώντας τη σχέση του Euler, γράφεται ως:

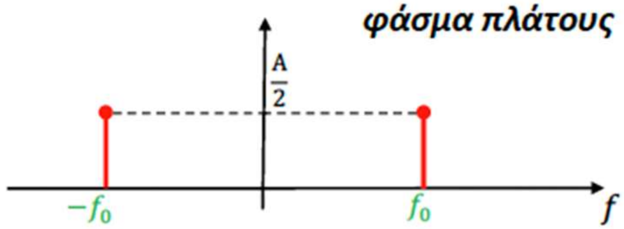
$$x(t) = A\cos\left(2\pi f_0 t + \varphi\right) = \boxed{\frac{A}{2}e^{j\phi}}e^{j2\pi f_0 t} + \boxed{\frac{A}{2}e^{-j\phi}}e^{-j2\pi f_0 t}$$

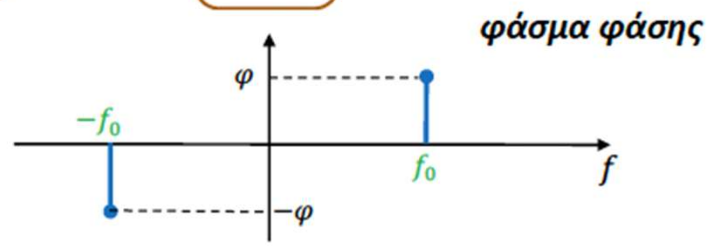
— Η αναπαράσταση του στο πεδίο της συχνότητας θα είναι:



Περιγραφή σήματος στο πεδίο του χρόνου και της συχνότητας

$$x(t) = A\cos\left(2\pi f_0 t + \varphi\right) = \boxed{\frac{A}{2}e^{j\phi}}e^{j2\pi f_0 t} + \boxed{\frac{A}{2}e^{-j\phi}}e^{-j2\pi f_0 t}$$





— Κάθε πραγματικό σήμα που αναλύεται φασματικά έχει τις ακόλουθες συμμετρίες:

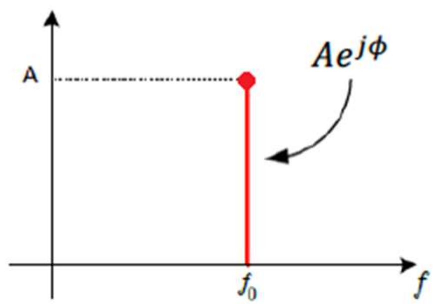
1) Άρτια συμμετρία στο φάσμα πλάτους του
2) Περιττή συμμετρία στο φάσμα φάσης του

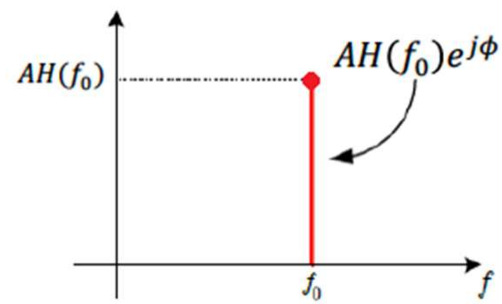
— Η συμμετρία προκύπτει από τη συζυγία των φασόρων.

Απόκριση ΓΧΑ συστημάτων σε μιγαδικό εκθετικό σήμα

$$x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \phi)} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = H\left(f_0\right) Ae^{j(2\pi f_0 t + \phi)}$$

$$H\left(f_0\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j2\pi f_0 t} dt$$





Ορθογώνια σήματα

—Όταν $k = m$

$$\left\langle e^{jk\omega_0 t}, e^{jm\omega_0 t} \right\rangle = \int_0^T e^{j0\omega_0 t} dt = \int_0^T dt = T$$

Συνεπώς,

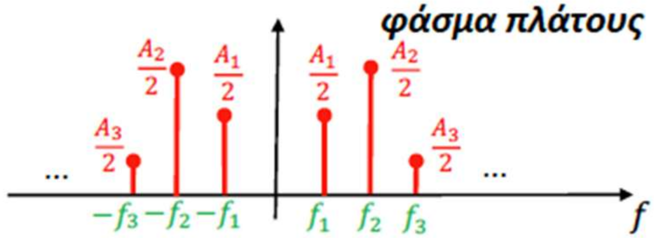
$$\left\langle e^{jk\omega_0 t}, e^{jm\omega_0 t} \right\rangle = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ T, & k = m \end{cases} = T\delta(k-m)$$

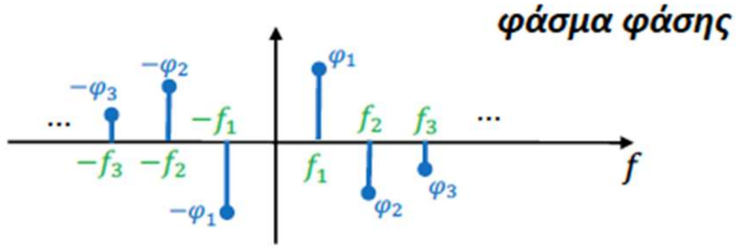
— Παρατηρούμε ότι το εσωτερικό γινόμενο των μιγαδικών σημάτων απλής συχνότητας είναι ίσο με μηδέν για k διαφορετικό από m, επομένως τα σήματα είναι ορθογώνια και σχηματίζουν ένα σύνολο ορθογώνιων σημάτων.

Σήμα ως γραμμικός συνδυασμός σημάτων απλής συχνότητας

Περιγραφή σήματος στο πεδίο του χρόνου και της συχνότητας

$$x(t) = \sum_k A_k \cos\left(2\pi f_k t + \varphi_k\right) = \sum_k \left[\frac{A_k}{2} e^{j\varphi_k} e^{j2\pi f_k t} + \frac{A_k}{2} e^{-j\varphi_k} e^{-j2\pi f_k t}\right]$$





Εκθετική σειρά Fourier (Ανάπτυγμα Fourier)

— Ένα περιοδικό σήμα x(t) με περίοδο T_0 μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός αρμονικά συσχετισμένων σημάτων με τους εξής τρόπους:

Εξίσωση σύνθεσης

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Εξίσωση Ανάλυσης

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

— Οι συντελεστές της εκθετική σειράς είναι μιγαδικοί αριθμοί:
  - — Πλάτος: |a_k| εκφράζει το μέτρο του μιγαδικού συντελεστή a_k.
  - — Φάση: φk = angle(a_k) εκφράζει τη γωνία του μιγαδικού a_k.
  - — a_k = |a_k|e^(jφ_k) - πολική μορφή του συντελεστή.

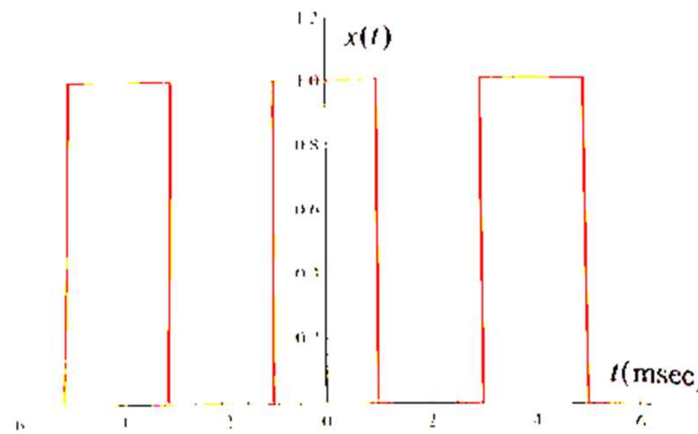
Παράδειγμα 1 (2.10 του βιβλίου)

Για το περιοδικό σήμα παλμών μοναδιαίου πλάτους, να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους και φάσης

$$x_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi k f_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} e^{-j2\pi k f_0 t}dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} \cos 2\pi k f_0 t dt - j\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} \sin 2\pi k f_0 t dt$$

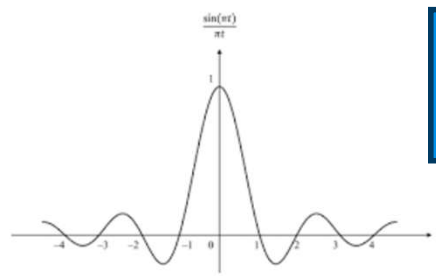
$$= \frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{k\pi} - 0 = \frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{k\pi}.$$



(α)

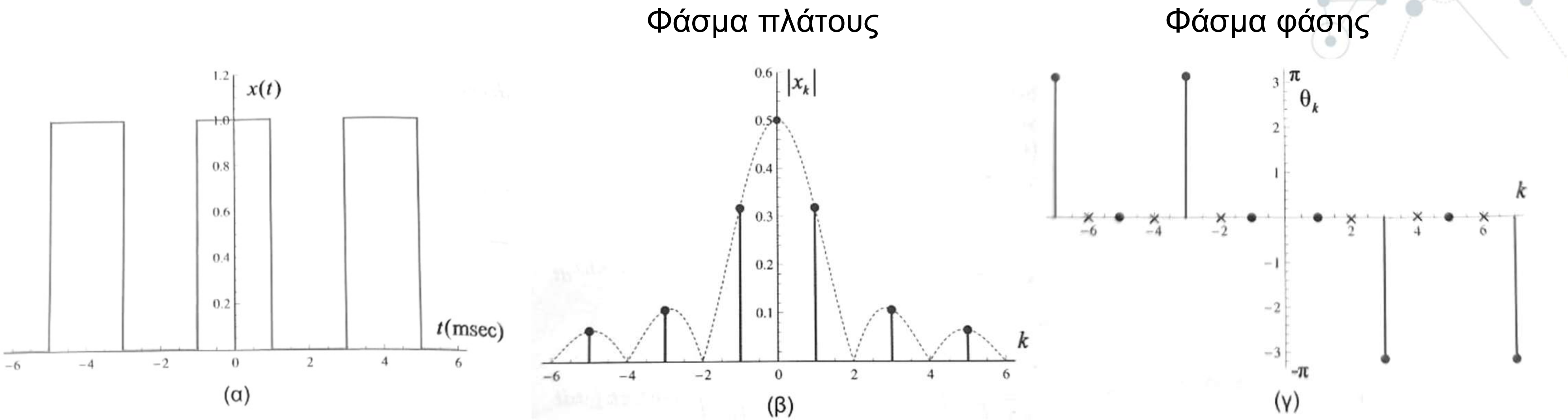
Η συνάρτηση sinc ορίζεται ως

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$



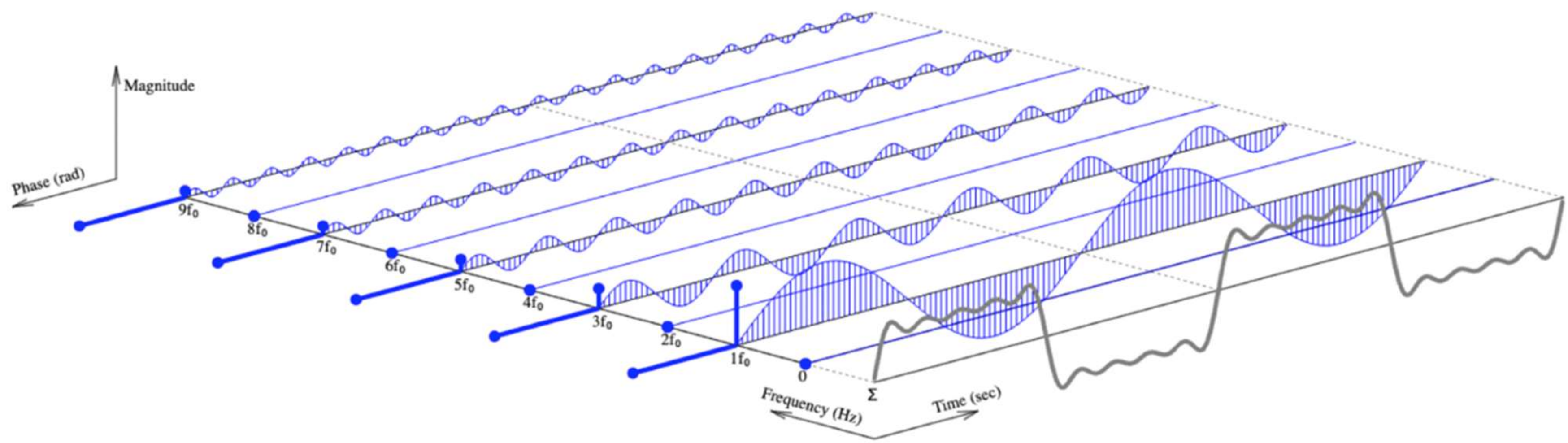
$$x(k) = \frac{1}{2}sinc(\frac{k}{2})$$

Παράδειγμα 1 (2.10 του βιβλίου)



- Διακριτές τιμές για *kf*
- DC τιμή A/2= 0.5
- Φάσμα πλάτους συμμετρικό ώς προς την αρχή των αξόνων
- Φάσμα φάσης δεν ορίζεται για *2kf*

Σειρές Fourier - τετραγωνικός παλμός



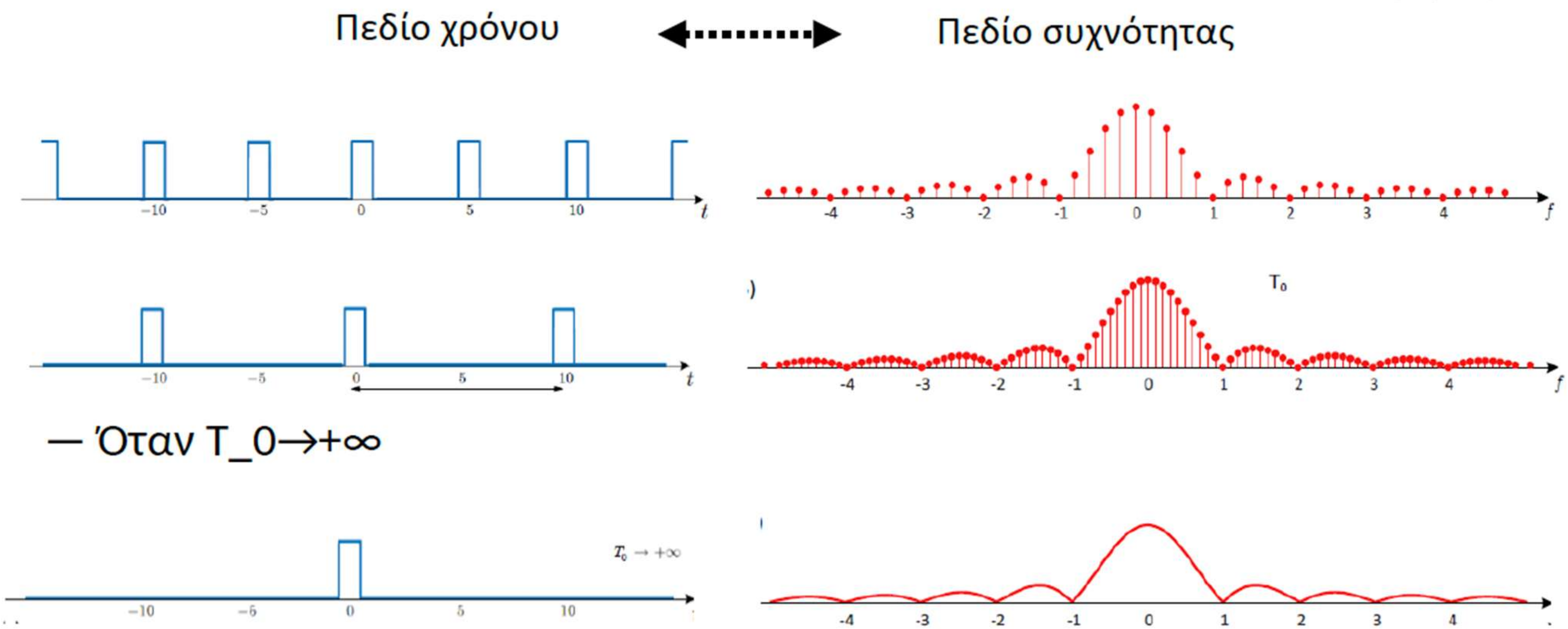
Μετασχηματισμός (Μ/Σ) Fourier

— Τι θα συμβεί αν T_0→+∞ ;

— Σίγουρα το σήμα θα πάψει να είναι περιοδικό

Πώς αναπαρίσταται συχνοτικά ένα **μη περιοδικό** σήμα;

Μετασχηματισμός (Μ/Σ) Fourier



Μετασχηματισμός (Μ/Σ) Fourier

— Τυπικά:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{j2\pi k f_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\overbrace{\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt}^{X_k} \right) e^{j2\pi k f_0 t}$$

— Όταν T_0→+∞, τότε 1/T_0 →df και kf_0→f γίνεται συνεχής μεταβλητή

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} df \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \right) e^{j2\pi f t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt}_{X(f)} \right) e^{j2\pi f t} df$$

Μετασχηματισμός (Μ/Σ) Fourier

- Ο όρος:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

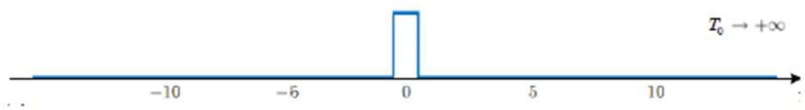
ονομάζεται μετασχηματισμός Fourier και συμβολίζεται με X(f) ή X(ω).

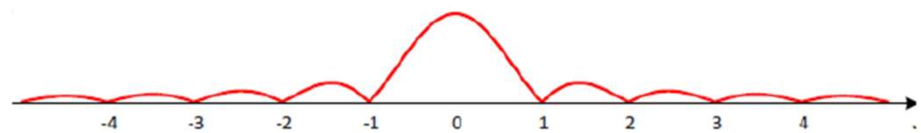
- Ο όρος:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$$

ονομάζεται αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier και συμβολίζεται με x(t).

Μετασχηματισμός (Μ/Σ) Fourier





Πεδίο χρόνου ⟷ Πεδίο συχνότητας

$$x(t) = \mathscr{F}^{-1}\left[X(f)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$$

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier

$$X(f) = \mathscr{F}\left[x(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

Μετασχηματισμός Fourier

Μετασχηματισμός (Μ/Σ) Fourier

— Ο Μετασχηματισμός Fourier είναι μια μιγαδική συνάρτηση της συχνότητας και επομένως:

- Έχει πραγματικό και φανταστικό μέρος
- Έχει μέτρο και φάση

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(2\pi ft)dt - j\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(2\pi ft)dt$$

$$= \mathrm{Re}\{X(f)\} + j\,\mathrm{Im}\{X(f)\} = X_R(f) + jX_I(f)$$

Μετασχηματισμός (Μ/Σ) Fourier

- Μέτρο: $|X(f)| = \sqrt{X_R^2(f) + X_I^2(f)} \geq 0$
- Φάση: $\phi(f) = \tan^{-1}\dfrac{X_I(f)}{X_R(f)},$

Συνεπώς ο μετασχηματισμός Fourier γράφεται σε πολική μορφή ως

$$X(f) = |X(f)|\, e^{j\phi(f)}$$

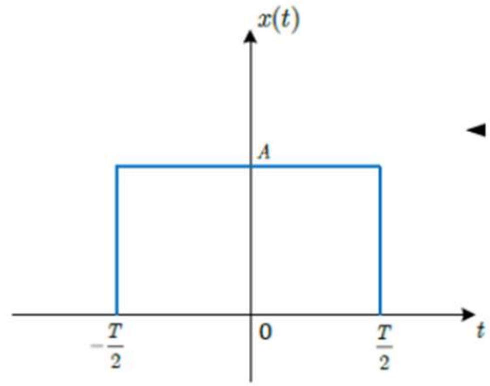
Η φάση του πραγματικού ΜF $X(f)$:

$$\phi(f) = \begin{cases} 0, & \text{if } \operatorname{Re}\{X(f)\} > 0, \\ -\pi & \text{if } \operatorname{Re}\{X(f)\} < 0 \text{ and } f > 0, \\ \pi & \text{if } \operatorname{Re}\{X(f)\} < 0 \text{ and } f < 0, \\ \text{undefined}, & \text{if } \operatorname{Re}\{X(f)\} = 0. \end{cases}$$

Παράδειγμα 1 τετραγωνικός παλμός

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος

$$x(t) = A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} A, & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$



Παράδειγμα 1 τετραγωνικός παλμός

Ο μετασχηματισμός Fourier είναι:

$$X(f) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = A \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi f t}\, dt$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$X(f) = A\left[\frac{e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f}\right]_{-T/2}^{T/2} = -\frac{A}{j2\pi f}\left[e^{-j\pi f \mathrm{T}} - e^{j\pi f \mathrm{T}}\right] = -\frac{A}{j2\pi f}\left(-2j\sin(\pi f \mathrm{T})\right) = \frac{A}{\pi f}\sin(\pi f \mathrm{T})$$

Επομένως ο Μ/Σ fourier είναι

$$X(f) = \frac{A}{\pi f}\sin(\pi f \mathrm{T}) = \frac{A\mathrm{T}}{\pi f \mathrm{T}}\sin(\pi f \mathrm{T}) = AT\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = \boxed{AT\, sinc(fT)}$$

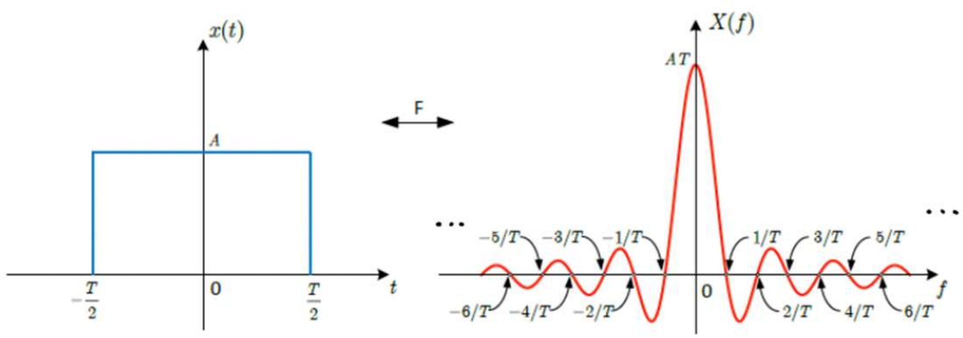
Παράδειγμα 1 τετραγωνικός παλμός

$$\boxed{X(f) = AT\,\mathrm{sinc}(fT)}$$

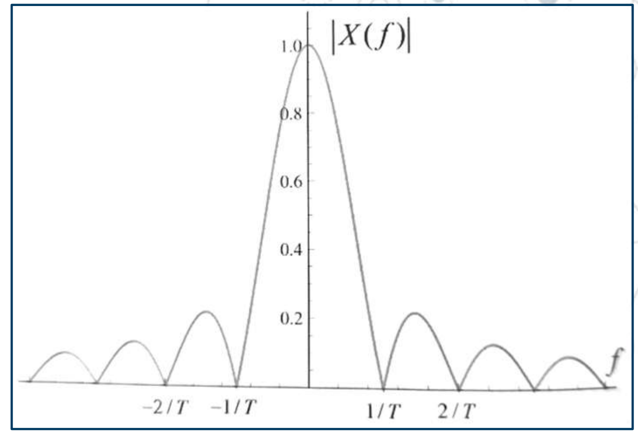
$$\sin(\pi f T) = 0 \implies \pi f T = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}.$$

Άρα: $f = \dfrac{n}{T}, \quad n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}.$

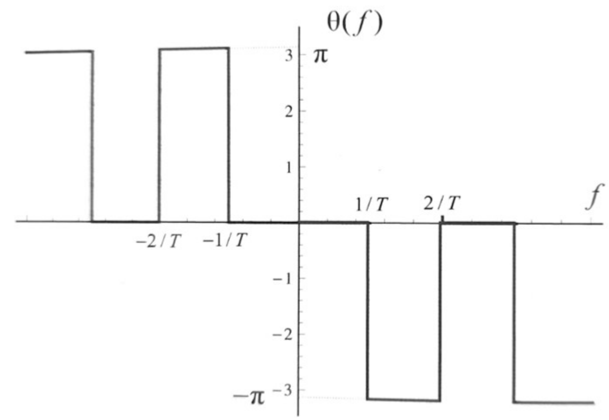
Επομένως, τα σημεία μηδενισμού του MF είναι: $f = \pm\dfrac{1}{T}, \pm\dfrac{2}{T}, \pm\dfrac{3}{T}, \dots$



Φάσμα πλάτους



Φάσμα φάσης

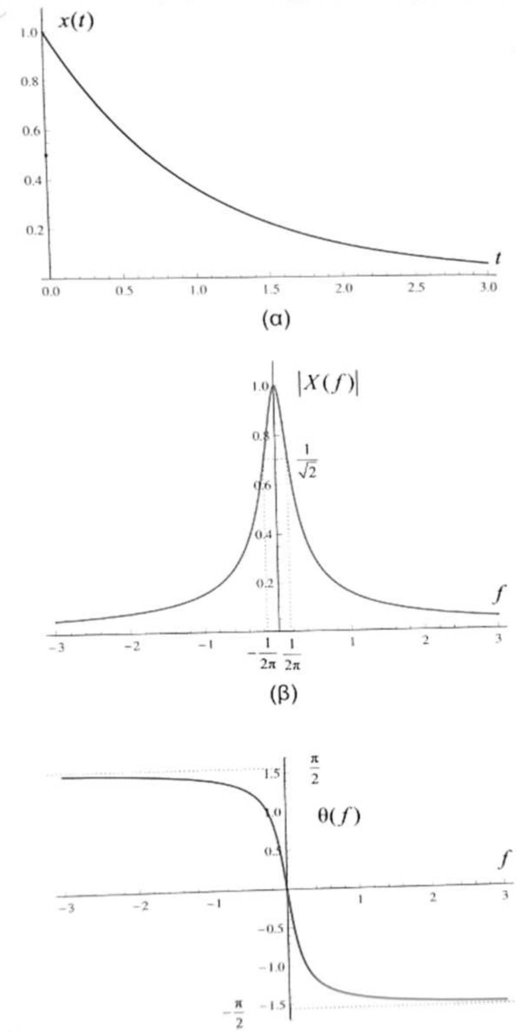


(γ)

Παράδειγμα 2 (2.12 του βιβλίου)

να βρεθούν τα φάσματα πλάτους και φάσης για το εκθετικό σήμα:

$$x(t)=\begin{cases} e^{-t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



(α)

(β)

(γ)

Ύπαρξη μετασχηματισμού Fourier (συνθήκες Dirichlet)

— Αρκεί το σήμα να είναι απολύτως ολοκληρώσιμο

$$|X(f)| < +\infty \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\,dt < +\infty$$

— Πρέπει να έχει πεπερασμένου πλήθους ασυνέχειες σε ένα οποιοδήποτε διάστημα.

—Πρέπει να έχει πεπερασμένου πλήθους μέγιστα και ελάχιστα σε ένα οποιοδήποτε διάστημα.

— Κάθε σήμα που παράγεται στο εργαστήριο ή υπάρχει στη φύση έχει μετασχηματισμό Fourier.

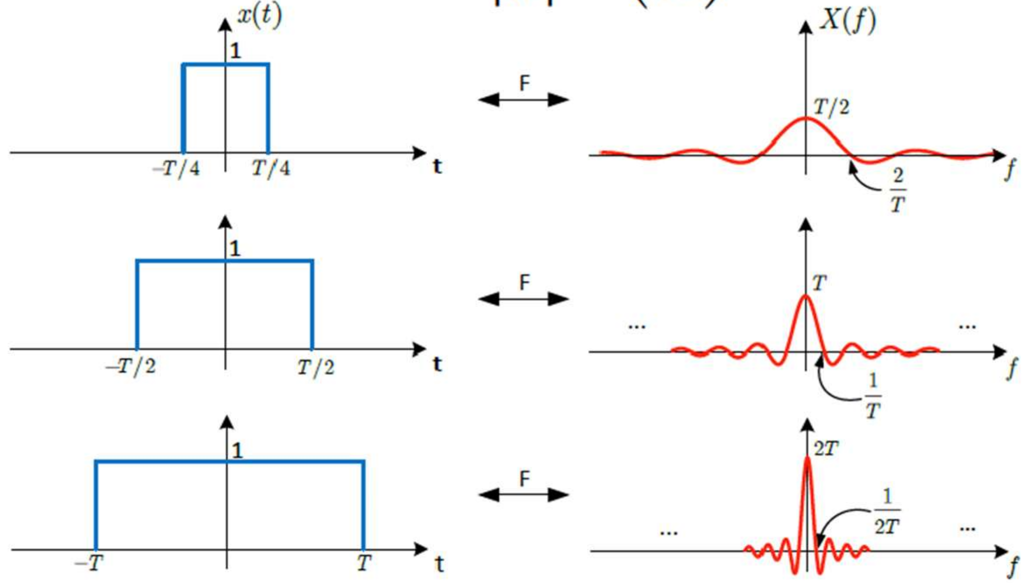
Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier

- $x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)df$ και $X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt$.
- $\mathcal{F}\{x(\alpha t)\} = |\alpha|^{-1} X\left(f\alpha^{-1}\right),\ \alpha \in \mathbb{R}$. — Αλλαγή κλίμακας στο χρόνο
- $\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} = e^{-j2\pi f t_0} X(f)$. — Ολίσθηση στο χρόνο
- $\mathcal{F}\{e^{\pm j2\pi f_c t} x(t)\} = X(f \mp f_c)$. — Ολίσθηση στη συχνότητα (Θεώρημα διαμόρφωσης)
- $\mathcal{F}\{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\} = a_1 X_1(f) + a_2 X_2(f)\}$. — Γραμμικότητα
- $\mathcal{F}\{x_1(t) x_2(t)\} = X_1(f) * X_2(f)$. — Πολλαπλασιασμός στο χρόνο
- $\mathcal{F}\{x_1(t) * x_2(t)\} = X_1(f) X_2(f)$. — Πολλαπλασιασμός στη συχνότητα
- $\mathcal{F}\left\{\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\} = (j2\pi f)^k X(f)$. — Παραγώγιση/ ολοκλήρωση

Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier

Παράδειγμα αλλαγής κλίμακας στο χρόνο

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier

Συνέλιξη στο χρόνο (Θεώρημα της Συνέλιξης)

$$y(t) = h(t) * x(t) \longleftrightarrow Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = h(t) * x(t)$$

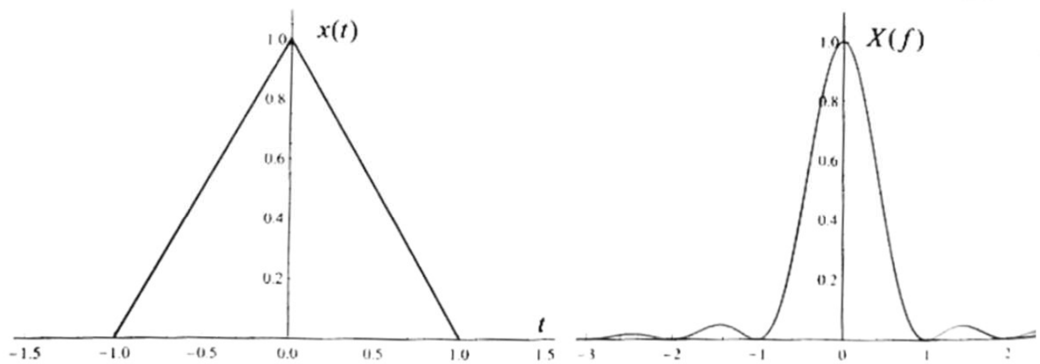
$$X(\omega) \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$$

Παράδειγμα (2.16 του βιβλίου)

Να βρεθεί ο Μ/Σ Fourier του τριγωνικού παλμού, αν δίνεται ότι:

$$\Lambda(\mathrm{t}) = \prod(t) * \prod(t)$$

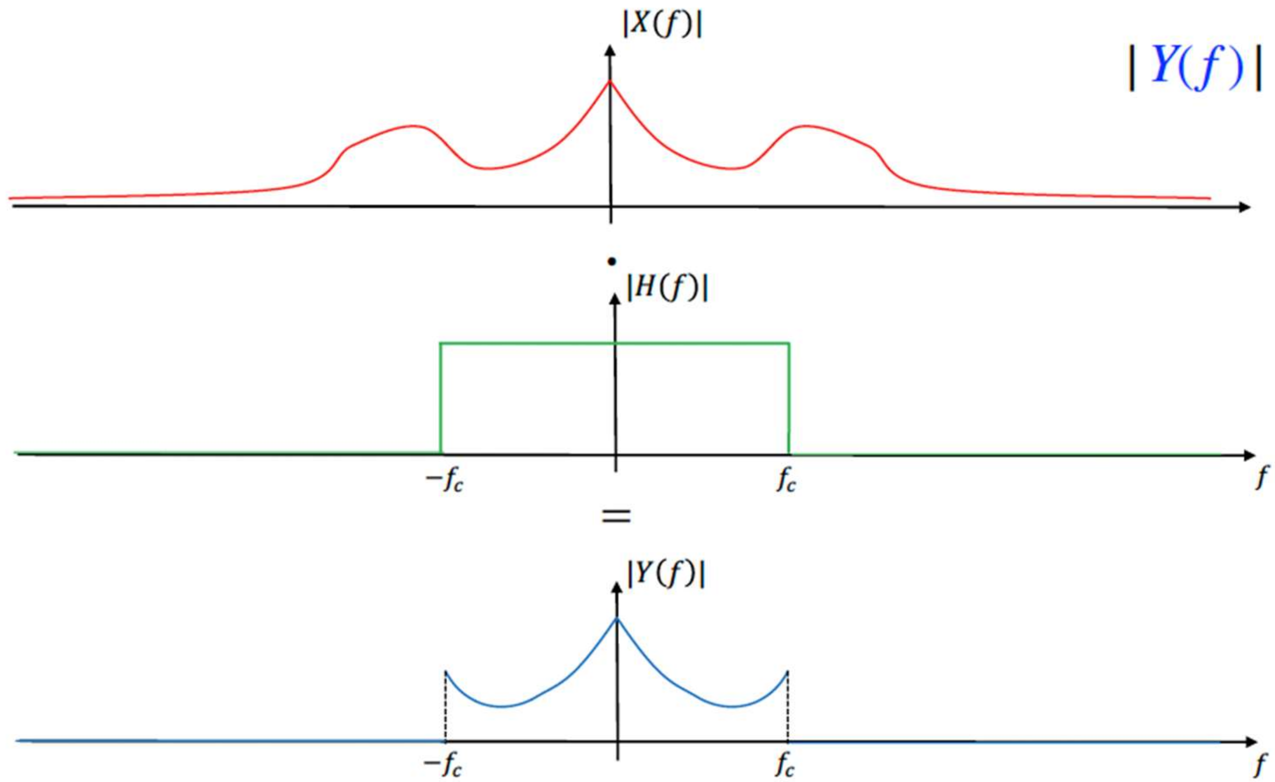
$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\wedge(t)] &= \mathcal{F}[\Pi(t) * \Pi(t)] = \mathcal{F}[\Pi(t)]\mathcal{F}[\Pi(t)] \\ &= (\mathcal{F}[\Pi(t)])^2 = \operatorname{sinc}^2 f.\end{aligned}$$



Σχήμα 2.16: Σήμα και Μ/Σ Fourier του Παραδείγματος 2.16

Φιλτράρισμα

$$|Y(f)| = |X(f)|\,|H(f)|$$



Θεώρημα διαμόρφωσης

- $\mathcal{F}\{e^{\pm j2\pi f_c t}x(t)\} = X(f \mp f_c)$.

Παράδειγμα 2.14
Να βρεθεί ο Μ/Σ Fourier του σήματος

$$y(t) = Ax(t)\cos 2\pi f_c t$$

συναρτήσει του $X(f)$ όταν το $x(t)$ είναι ένα πραγματικό σήμα.

Απάντηση
Από τη σχέση του Euler το $y(t)$ γράφεται ως

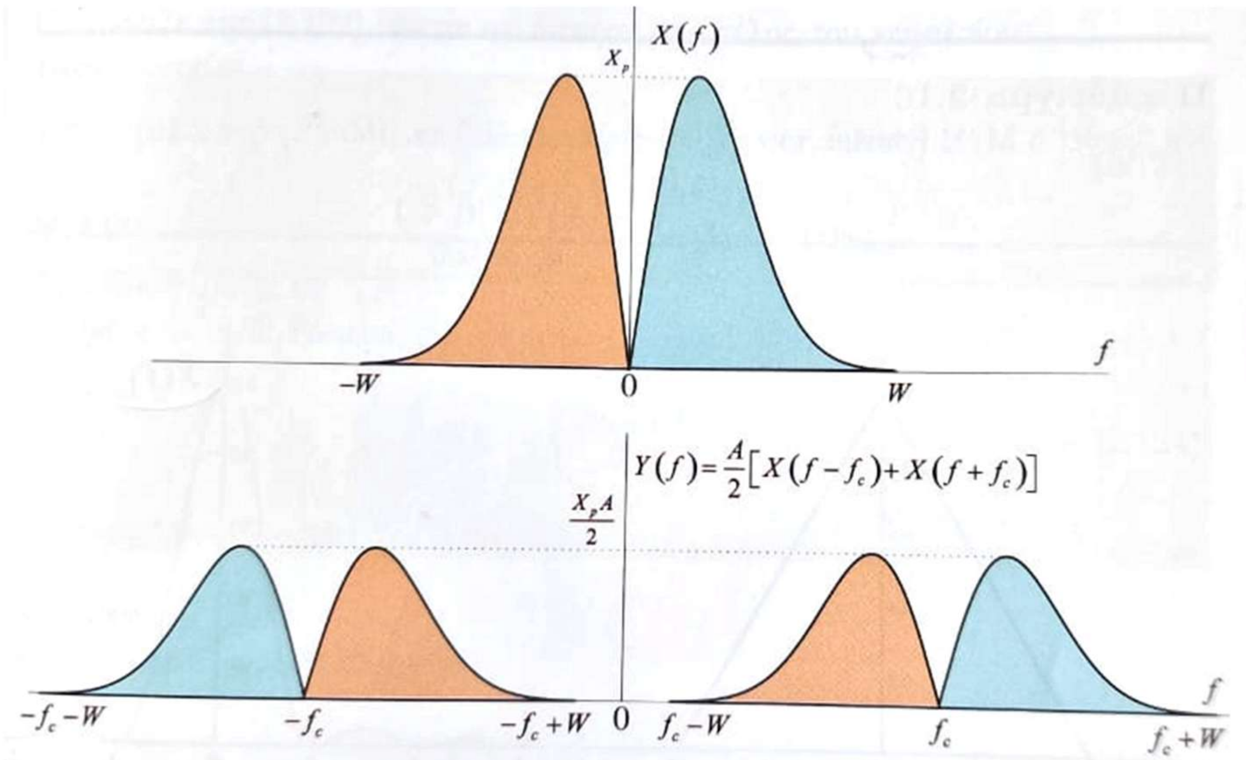
$$y(t) = A\frac{1}{2}[e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t}]x(t)$$

οπότε

$$Y(f) = \mathcal{F}[y(t)] = A\frac{1}{2}\{\mathcal{F}[x(t)e^{j2\pi f_c t}] + \mathcal{F}[x(t)e^{-j2\pi f_c t}]\}$$
$$= \frac{A}{2}[X(f - f_c) + X(f + f_c)],$$

Θεώρημα διαμόρφωσης

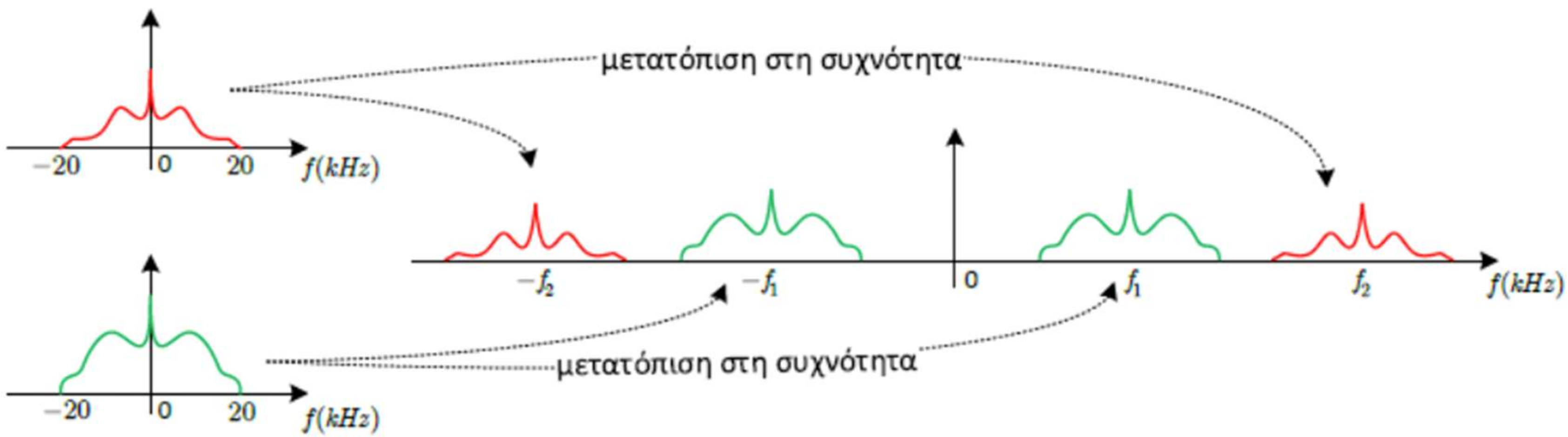
$$y(t) = Ax(t)\cos(2\pi f_c \mathrm{t}) \leftrightarrow \mathrm{Y}(f) = \frac{A}{2}[X(f - f_c) + X(f + f_c)]$$



Θεώρημα διαμόρφωσης

$y_1(t) = Ax_1(t)\cos(2\pi f_1 \mathrm{t})$ $\qquad$ $Y_1(f) = \frac{A}{2}[X_1(f - f_1) + X_1(f + f_1)]$

$y_2(t) = Ax_2(t)\cos(2\pi f_2 \mathrm{t})$ $\qquad$ $Y_2(f) = \frac{A}{2}[X_2(f - f_c) + X_2(f + f_2)]$



Θεώρημα διαμόρφωσης

ix) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα διαμόρφωσης του M/Σ Fourier

$$\mathcal{F}[e^{j2\pi f_0 t}] = \delta(f - f_0)$$

και

$$\mathcal{F}[e^{-j2\pi f_0 t}] = \delta(f + f_0).$$

Επειδή

$$\cos 2\pi f_0 t = \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}, \ \sin 2\pi f_0 t = \cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

προκύπτει

$$\mathcal{F}[\cos 2\pi f_0 t] = \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

M/Σ Fourier

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt = 1$$

και από τη δυϊκότητα του M/Σ Fourier

$$\mathcal{F}[1] = \delta(-f) = \delta(f).$$

Μ/Σ Fourier Περιοδικού σήματος

x) Ο Μ/Σ Fourier ενός περιοδικού σήματος $x(t)$ θα είναι

$$\mathcal{F}[x(t)] = X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta(f - kf_0), \tag{2.146}$$

όπου x_k είναι οι συντελεστές της σειράς Fourier στην (2.55).

Οι συντελεστές x_k συνδέονται με το Μ/Σ Fourier του σήματος $x(t)$ σε μία περίοδο T_0 μέσω της σχέσης

$$x_k = \frac{1}{T_0} X\left(\frac{k}{T_0}\right). \tag{2.147}$$

Πίνακας Μ/Σ Fourier βασικών συναρτήσεων

$x(t)$	$X(f) = \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$
$X(t)$	$x(-f)$
$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{f}{a}\right)$
$x(t-t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi ft_0}$
$x(t)\cos 2\pi f_0 t$	$\frac{X(f-f_0)+X(f+f_0)}{2}$
$x(t)e^{j2\pi f t_0}$	$X(f-f_0)$
$x(t) * h(t)$	$X(f)H(f)$
$x(t)h(t)$	$X(f) * H(f)$
$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi f X(f)$
$tx(t)$	$\frac{-1}{j2\pi}\frac{dX(f)}{df}$
$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)\delta(f)}{2}$

$\delta(t)$	1
1	$\delta(f)$
$u(t)$	$\frac{\delta(f)}{2} + \frac{1}{j2\pi f}$
$\mathrm{sgn}t$	$\frac{1}{j\pi f}$
$\sin 2\pi f_0 t$	$\frac{\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)}{2j}$
$\cos 2\pi f_0 t$	$\frac{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)}{2}$
$\Pi(t)$	$\mathrm{sinc} f$
$\Lambda(t)$	$\mathrm{sinc}^2 f$
$\frac{1}{t}$	$-j\pi\mathrm{sgn} f$

Πίνακας Μ/Σ Fourier βασικών συναρτήσεων

Χρήσιμα Ζεύγη Μετασχηματισμού Fourier

$x(t)$	$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$
$X(t)$	$x(-f)$
$x(\alpha t)$	$\frac{1}{\lvert\alpha\rvert} X\left(\frac{f}{\lvert\alpha\rvert}\right)$
$x(t-t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi f t_0}$
$x(t)\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}\left(X(f-f_0)+X(f+f_0)\right)$
$x(t)e^{j2\pi f_0 t}$	$X(f-f_0)$
$x(t) * h(t)$	$X(f)H(f)$
$x(t)h(t)$	$X(f) * H(f)$
$\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi f X(f)$
$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)\delta(f)}{2}$
$\delta(t)$	1
1	$\delta(f)$
$\frac{1}{t}$	$-j\pi \mathrm{sgn}(f)$
$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert \le T/2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$	$T\mathrm{sinc}(fT)$
$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1-\frac{\lvert t\rvert}{T}, & \lvert t\rvert \le T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$	$T\mathrm{sinc}^2(fT)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}\left(\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right)$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2j}\left(\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)\right)$

Θεώρημα Parseval

- Η ισχύς ενός περιοδικού σήματος $x(t)$:

$$\mathcal{P}_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2.$$

- Η ενέργεια ενός μη περιοδικού σήματος $x(t)$:

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \left(= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \right).$$

- Ο όρος $|X(f)|^2$ ονομάζεται *φασματική πυκνότητα ενέργειας* *(energy spectral density)* του $x(t)$ κι η αντίστοιχη ποσότητα στη μονάδα χρόνου είναι γνωστή ως *φασματική πυκνότητα ισχύος* *(power spectral density)*.

Συναρτήσεις Συσχέτισης Σημάτων (1/3)

- Η *συσχέτιση (correlation)* δύο σημάτων καταδεικνύει το βαθμό ομοιότητας τους.
- Έστω τα σήματα $x(t)$ και $y(t)$. Ορίζεται η *συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (autocorrelation function)* για κάθε σήμα χωριστά κι η *συνάρτηση ετεροσυσχέτισης (cross-correlation function)* μεταξύ τους.
- Η μελέτη της συσχέτισης σημάτων είναι εξαιρετικά σημαντική σε διάφορους τομείς της επεξεργασίας σήματος (πχ ραντάρ, συστήματα επικοινωνιών).

Συναρτήσεις ΕτεροΣυσχέτισης Σημάτων (ΣΕΣ)

- Για σήματα ενέργειας:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt,$$

$$R_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)x^*(t-\tau)dt.$$

- Για σήματα ισχύος:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y^*(t-\tau)dt,$$

$$R_{yx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t)x^*(t-\tau)dt.$$

- Για περιοδικά σήματα ισχύος:

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)y^*(t-\tau)dt,$$

$$R_{yx}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t)x^*(t-\tau)dt.$$

Συσχέτιση και Συνέλιξη

- Για δύο σήματα ενέργειας $x(t)$ και $y(t)$:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt.$$

- Η $\boxed{\text{συνέλιξη}}$ τους:

$$\begin{aligned} x(t) * y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(\tau-t)dt. \end{aligned}$$

- Συμπερασματικά:

$$R_{xy}(\tau) = x(\tau) * y^*(-\tau).$$

Σημαντικές ιδιότητες των Συναρτήσεων ΕτεροΣυσχέτισης (ΣΕΣ)

ii) Δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα (όπως στην περίπτωση της συνέλιξης). Δηλαδή

$$\boxed{R_{xy}(\tau) \neq R_{yx}(\tau).} \tag{2.161}$$

Όμως ισχύει

$$\boxed{R_{xy}(\tau) = R^*_{yx}(-\tau).} \tag{2.162}$$

iii) Δύο σήματα ονομάζονται *ορθογώνια* αν ισχύει

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = 0,} \tag{2.163}$$

δηλαδή $\boxed{R_{xy}(0) = 0.}$ Τότε θα ισχύει και $R_{yx}(0) = 0$.

iv) Αν τα $x(t)$ και $y(t)$ είναι περιοδικά σήματα με περίοδο T_0 τότε

$$R_{xy}(\tau + kT_0) = R_{xy}(\tau), \tag{2.164}$$

Άσκηση 5

Άσκηση 5

Έστω τα σήματα $x(t) = s_{\mathrm{I}}(t)$ και $y(t) = js_{\mathrm{Q}}(t)$ που προκύπτουν από τη συμφασική και την ορθογώνια συνιστώσα του σήματος $s(t) = e^{j2\pi f_c t}$.

Να υπολογιστούν οι συναρτήσεις $R_{xy}(\tau)$ και $R_{yx}(\tau)$.

Λύση της Άσκησης 5

- Προκύπτει ότι:

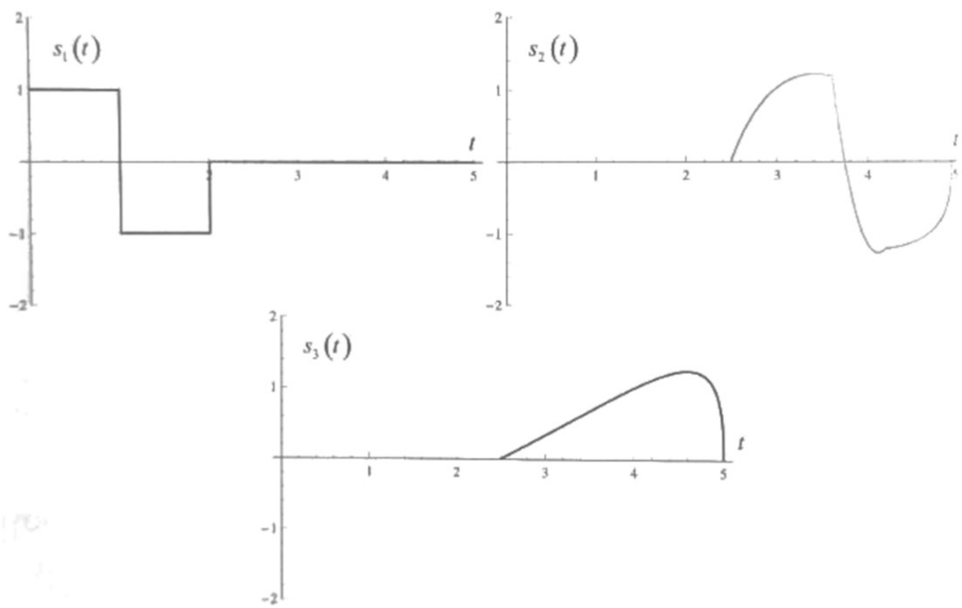
$$
\begin{aligned}
R_{xy}(\tau) &= -jf_c \int_{-\frac{1}{2f_c}}^{\frac{1}{2f_c}} \cos(2\pi f_c t) \sin(2\pi f_c (t-\tau))\, dt \\
&= \frac{j}{2} \sin(2\pi f_c \tau), \\
R_{yx}(\tau) &= jf_c \int_{-\frac{1}{2f}}^{\frac{1}{2f}} \sin(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_c (t-\tau))\, dt \\
&= \frac{j}{2} \sin(2\pi f_c \tau).
\end{aligned}
$$

- Επαληθεύεται εύκολα ότι: $R_{xy}(\tau) = R^*_{yx}(-\tau)$.
- Επίσης, προκύπτει εύκολα ότι: $R_{xy}(0) = 0 \Rightarrow x(t), y(t)$: ορθογώνια.

ΕτεροΣυσχέτιση Σημάτων

Παράδειγμα 2.20

Ένας πομπός τηλεπικοινωνιακού συστήματος εκπέμπει το σήμα $s_1(t)$ του Σχήματος 2.20. Όταν στο δέκτη λαμβάνεται το $s_2(t)$ αυτός αποφασίζει ότι έχει σταλεί το $s_1(t)$ ενώ όταν λαμβάνεται το $s_3(t)$ ο δέκτης αποκλείει να έχει σταλεί το $s_1(t)$. Χρησιμοποιώντας την έννοια της ΣΕΣ να εξηγήσετε τις αποφάσεις του δέκτη.



Σχήμα 2.20: Σήματα του Παραδείγματος 2.20

Συναρτήση ΑυτοΣυσχέτισης (ΣΑΣ)

- Η ΣΑΣ ορίζεται ως η συσχέτιση ενός σήματος με τον εαυτό του:

$$\boxed{R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt}$$

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x^*(t)dt$$

- Για περιοδικά σήματα ισχύος ισχύει

$$\boxed{R_x(\tau) = \frac{1}{\mathrm{T}_o}\int_{-\mathrm{T}_o/2}^{\mathrm{T}_o/2} x(t-\tau)x^*(t)dt}$$

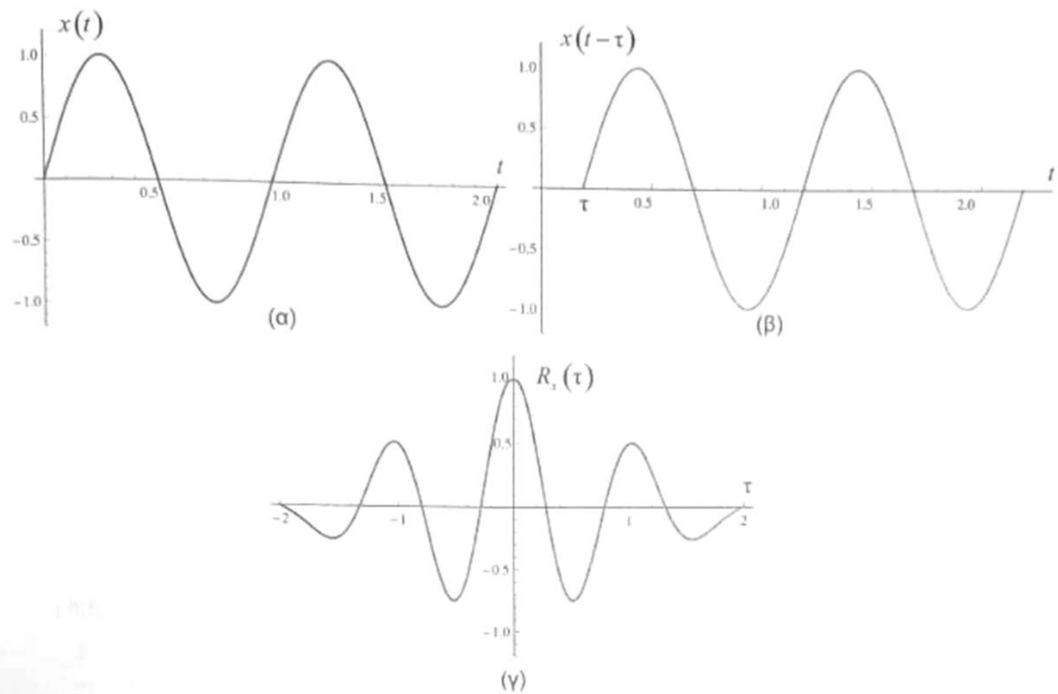
- Η ΣΑΣ παρουσιάζει συζυγή συμμετρία:

$$\boxed{R_x(-\tau) = R_x^*(\tau)}$$

΄Ασκηση 6

Άσκηση 6

Να υπολογιστεί η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του σήματος $x(t) = \sin(2\pi t)$ για $0 \leq t \leq 2$.



Ενδεικτικές Ιδιότητες Συνάρτησης Αυτοσυσχέτισης

- Για ένα σήμα ενέργειας $x(t)$:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt.$$

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης χρησιμοποιείται κι ως δείκτης της χρονικής μεταβολής του $x(t)$.

- Η ενέργεια του $x(t)$ προκύπτει ως:

$$\mathcal{E}_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt.$$

- Για τις τιμές του $R_x(\tau)$ αποδεικνύεται ότι:

$$|R_x(\tau)| \leq R_x(0) = \mathcal{E}_x.$$

Ενδεικτικές Ιδιότητες Συνάρτησης Αυτοσυσχέτισης

Για ένα σήμα ισχύος με ισχύ P_x

$$R_x(0) = \frac{1}{T_o}\int_{-T_o/2}^{T_o/2} |x(t)|^2 dt = P_x$$

Αν $S_x(f)$ είναι η φασματική πυκνότητα ισχύος ισχύει

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df$$

Και θα ισχύει

$$\mathcal{F}[R_x(\tau)] = S_x(f)$$

Μετασχηματισμός Fourier και Συνάρτηση Rx (τ)

- Η φασματική πυκνότητα ενέργειας ενός σήματος ενέργειας $x(t)$ με $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ προκύπτει ως:

$$\mathcal{F}\{\mathcal{R}_x(\tau)\} = |X(f)|^2.$$

(Απόδειξη: $\mathcal{F}\{\mathcal{R}_x(\tau)\} = \mathcal{F}\{x(\tau) * x^*(-\tau)\} = X(f)X^*(f) = |X(f)|^2$)

- Για ένα περιοδικό σήμα ισχύος $x(t)$ η φασματική πυκνότητα ισχύος προκύπτει ως:

$$\mathcal{S}_x(f) \triangleq \mathcal{F}\{\mathcal{R}_x(\tau)\}.$$

DEPARTMENT OF INFORMATICS & TELECOMMUNICATIONS

Τέλος μαθήματος

- Ερωτήσεις?