K21 - Συστήματα Επικοινωνιών

4ο Εξάμηνο
Τομέας Γ’ / Τμήμα Πληροφορικής και Επικοινωνιών
ΕΚΠΑ 2024-2025
Μετασχηματισμός Fourier

Γιώργος Κανέλλος

Επίκουρος Καθηγητής
Τμήμα Πληροφορικής και Επικοινωνιών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
gtkanellos@di.uoa.gr

Διάρθρωση μαθήματος

- Θεώρημα Parseval
- Συνάρτηση Έτεροσυσχέτισης (ΣΕΣ)
- Συνάρτηση Αύτοσυσχέτισης (ΣΑΣ)
- Μετασχηματισμός Hilbert
- Βασικά/ Ζωνοπερατά Σήματα
- Διαμόρφωση
- Φίλτρα

Θεώρημα Parseval

- Η ισχύς ενός περιοδικού σήματος $x(t)$:

$$\mathcal{P}_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2.$$

- Η ενέργεια ενός μη περιοδικού σήματος $x(t)$:

$$\mathcal{E}_x = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \left(= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \right).$$

- Ο όρος $|X(f)|^2$ ονομάζεται *φασματική πυκνότητα ενέργειας* *(energy spectral density)* του $x(t)$ κι η αντίστοιχη ποσότητα στη μονάδα χρόνου είναι γνωστή ως *φασματική πυκνότητα ισχύος* *(power spectral density)*.

Σήματα Ενέργειας και Σήματα Ισχύος

- Τα *σήματα ενέργειας* (*energy signals*) $x(t)$ έχουν μη μηδενική πεπερασμένη ενέργεια:

$$0 < \mathcal{E}_x < \infty.$$

- Τα *σήματα ισχύος* (*power signals*) $x(t)$ έχουν μη μηδενική πεπερασμένη ισχύ:

$$0 < \mathcal{P}_x < \infty.$$

- Ένα σήμα είναι είτε σήμα ενέργειας είτε σήμα ισχύος είτε τίποτα από τα δύο (πχ σήμα ράμπας).
- Ένα σήμα με πεπερασμένη ενέργεια έχει μηδενική ισχύ κι ένα σήμα με πεπερασμένη ισχύ έχει άπειρη ενέργεια.
- Συνήθως, στις τηλεπικοινωνίες παράγονται σήματα ενέργειας (στα μοντέλα θεωρούνται ως σήματα ισχύος).

Συναρτήσεις Συσχέτισης Σημάτων (1/3)

- Η *συσχέτιση (correlation)* δύο σημάτων καταδεικνύει το βαθμό ομοιότητας τους.
- Έστω τα σήματα $x(t)$ και $y(t)$. Ορίζεται η *συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (autocorrelation function)* για κάθε σήμα χωριστά κι η *συνάρτηση ετεροσυσχέτισης (cross-correlation function)* μεταξύ τους.
- Η μελέτη της συσχέτισης σημάτων είναι εξαιρετικά σημαντική σε διάφορους τομείς της επεξεργασίας σήματος (πχ ραντάρ, συστήματα επικοινωνιών).

Συναρτήσεις ΕτεροΣυσχέτισης Σημάτων (ΣΕΣ)

- Για σήματα ενέργειας:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt,$$

$$R_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)x^*(t-\tau)dt.$$

- Για σήματα ισχύος:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y^*(t-\tau)dt,$$

$$R_{yx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t)x^*(t-\tau)dt.$$

- Για περιοδικά σήματα ισχύος:

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)y^*(t-\tau)dt,$$

$$R_{yx}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t)x^*(t-\tau)dt.$$

Συσχέτιση και Συνέλιξη

- Για δύο σήματα ενέργειας $x(t)$ και $y(t)$:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t-\tau) dt.$$

- Η $\boxed{\text{συνέλιξη}}$ τους:

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(\tau - t) dt.$$

- Συμπερασματικά:

$$R_{xy}(\tau) = x(\tau) * y^*(-\tau).$$

Σημαντικές ιδιότητες των Συναρτήσεων ΕτεροΣυσχέτισης (ΣΕΣ)

ii) Δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα (όπως στην περίπτωση της συνέλιξης). Δηλαδή

$$\boxed{R_{xy}(\tau) \neq R_{yx}(\tau).} \tag{2.161}$$

Όμως ισχύει

$$\boxed{R_{xy}(\tau) = R_{yx}^{*}(-\tau).} \tag{2.162}$$

iii) Δύο σήματα ονομάζονται *ορθογώνια* αν ισχύει

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^{*}(t)dt = 0,} \tag{2.163}$$

δηλαδή $\boxed{R_{xy}(0) = 0.}$ Τότε θα ισχύει και $R_{yx}(0) = 0$.

iv) Αν τα $x(t)$ και $y(t)$ είναι περιοδικά σήματα με περίοδο T_0 τότε

$$R_{xy}(\tau + kT_0) = R_{xy}(\tau), \tag{2.164}$$

Άσκηση 5

Άσκηση 5

Έστω τα σήματα $x(t) = s_{\mathrm{I}}(t)$ και $y(t) = js_{\mathrm{Q}}(t)$ που προκύπτουν από τη συμφασική και την ορθογώνια συνιστώσα του σήματος $s(t) = e^{j2\pi f_c t}$.

Να υπολογιστούν οι συναρτήσεις $R_{xy}(\tau)$ και $R_{yx}(\tau)$.

Λύση της Άσκησης 5

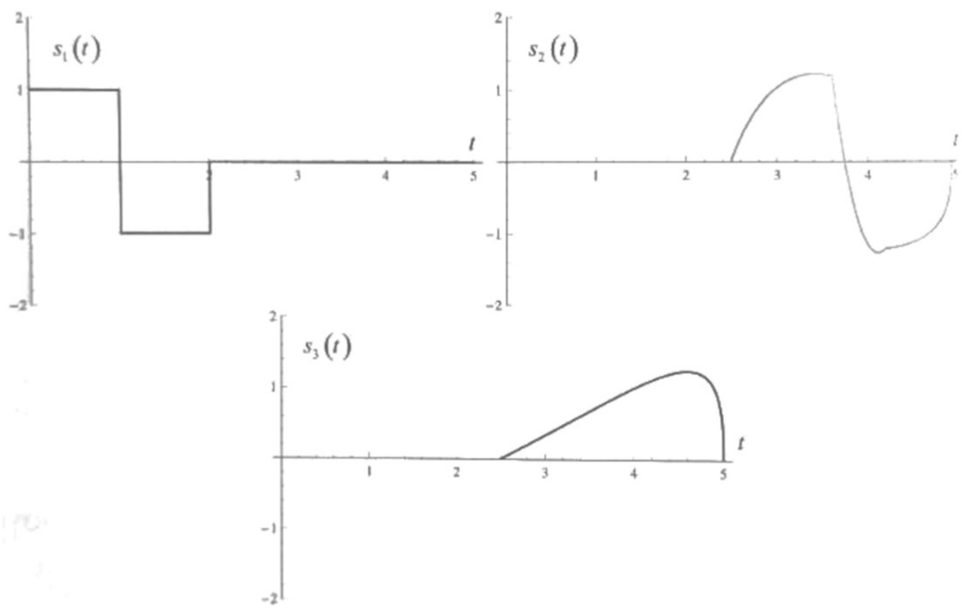
- Προκύπτει ότι:

$$R_{xy}(\tau) = -jf_c \int_{-\frac{1}{2f_c}}^{\frac{1}{2f_c}} \cos(2\pi f_c t) \sin(2\pi f_c(t-\tau))\, dt$$
$$= \frac{j}{2} \sin(2\pi f_c \tau),$$
$$R_{yx}(\tau) = jf_c \int_{-\frac{1}{2f}}^{\frac{1}{2f}} \sin(2\pi f_c t) \cos(2\pi f_c(t-\tau))\, dt$$
$$= \frac{j}{2} \sin(2\pi f_c \tau).$$

- Επαληθεύεται εύκολα ότι: $R_{xy}(\tau) = R^*_{yx}(-\tau)$.
- Επίσης, προκύπτει εύκολα ότι: $R_{xy}(0) = 0 \Rightarrow x(t), y(t)$: ορθογώνια.

ΕτεροΣυσχέτιση Σημάτων

Παράδειγμα 2.20
Ένας πομπός τηλεπικοινωνιακού συστήματος εκπέμπει το σήμα $s_1(t)$ του Σχήματος 2.20. Όταν στο δέκτη λαμβάνεται το $s_2(t)$ αυτός αποφασίζει ότι έχει σταλεί το $s_1(t)$ ενώ όταν λαμβάνεται το $s_3(t)$ ο δέκτης αποκλείει να έχει σταλεί το $s_1(t)$. Χρησιμοποιώντας την έννοια της ΣΕΣ να εξηγήσετε τις αποφάσεις του δέκτη.



Σχήμα 2.20: Σήματα του Παραδείγματος 2.20

Συναρτήση ΑυτοΣυσχέτισης (ΣΑΣ)

- Η ΣΑΣ ορίζεται ως η συσχέτιση ενός σήματος με τον εαυτό του:

$$\boxed{R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt}$$

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x^*(t)dt$$

- Για περιοδικά σήματα ισχύος ισχύει

$$\boxed{R_x(\tau) = \frac{1}{\mathrm{T}_o}\int_{-\mathrm{T}_o/2}^{\mathrm{T}_o/2} x(t-\tau)x^*(t)dt}$$

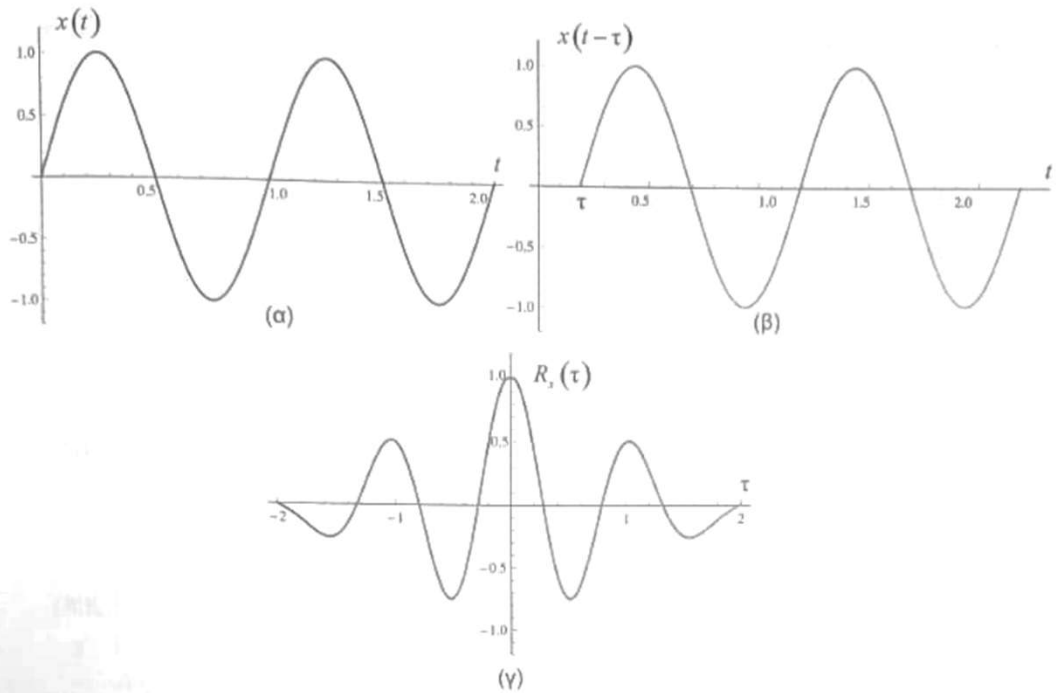
- Η ΣΑΣ παρουσιάζει συζυγή συμμετρία:

$$\boxed{R_x(-\tau) = R_x^*(\tau)}$$

Άσκηση 6

Άσκηση 6

Να υπολογιστεί η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του σήματος $x(t) = \sin(2\pi t)$ για $0 \leq t \leq 2$.



Ενδεικτικές Ιδιότητες Συνάρτησης Αυτοσυσχέτισης

- Για ένα σήμα ενέργειας $x(t)$:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt.$$

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης χρησιμοποιείται κι ως δείκτης της χρονικής μεταβολής του $x(t)$.

- Η ενέργεια του $x(t)$ προκύπτει ως:

$$\mathcal{E}_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt.$$

- Για τις τιμές του $R_x(\tau)$ αποδεικνύεται ότι:

$$|R_x(\tau)| \leq R_x(0) = \mathcal{E}_x.$$

Ενδεικτικές Ιδιότητες Συνάρτησης Αυτοσυσχέτισης

Για ένα σήμα ισχύος με ισχύ P_x

$$R_x(0) = \frac{1}{T_o}\int_{-T_o/2}^{T_o/2} |x(t)|^2 dt = P_x$$

Αν $S_x(f)$ είναι η φασματική πυκνότητα ισχύος ισχύει

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)df$$

Και θα ισχύει

$$\mathcal{F}[R_x(\tau)] = S_x(f)$$

Μετασχηματισμός Fourier και Συνάρτηση Rx (τ)

- Η φασματική πυκνότητα ενέργειας ενός σήματος ενέργειας $x(t)$ με $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ προκύπτει ως:

$$\mathcal{F}\{\mathcal{R}_x(\tau)\} = |X(f)|^2.$$

(Απόδειξη: $\mathcal{F}\{\mathcal{R}_x(\tau)\} = \mathcal{F}\{x(\tau) * x^*(-\tau)\} = X(f)X^*(f) = |X(f)|^2$)

- Για ένα περιοδικό σήμα ισχύος $x(t)$ η φασματική πυκνότητα ισχύος προκύπτει ως:

$$\mathcal{S}_x(f) \triangleq \mathcal{F}\{\mathcal{R}_x(\tau)\}.$$

Μετασχηματισμός Hilbert

- Ο μετασχηματισμός Hilbert ενός σήματος $x(t)$, δεδομένου του σήματος $h(t) \triangleq (\pi t)^{-1}$, ορίζεται ως:

$$\mathcal{H}\{x(t)\} = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau}d\tau.$$

- $\mathcal{F}\{\mathcal{H}\{x(t)\}\} = \mathcal{F}\{h(t)\}X(f) = -j\mathrm{sgn}(f)X(f).$
- $\mathcal{H}\{x_1(t) * x_2(t)\} = \mathcal{H}\{x_1(t)\} * x_2(t) = x_1(t) * \mathcal{H}\{x_2(t)\}.$
- $\mathcal{H}\{\mathcal{H}\{x(t)\}\} = -x(t).$
- $\mathcal{H}\{x(\alpha t)\} = \mathrm{sgn}(\alpha)\mathcal{H}\{x(t)\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Τα $x(t)$ και $\mathcal{H}\{x(t)\}$ είναι μεταξύ τους ορθογώνια.

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} -1 & \text{if } x < 0, \\ 0 & \text{if } x = 0, \\ 1 & \text{if } x > 0. \end{cases}$$

Παραδείγματα Μ/Σ Hilbert

$x(t)$	$\mathcal{H}[x(t)] = \widehat{x}(t)$
$a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$	$a_1\widehat{x}_1(t) + a_2\widehat{x}_2(t)$
$x(t-t_0)$	$\widehat{x}(t-t_0)$
$x(at)$	$\text{sgn}\, a\, \widehat{x}(at)$
$\frac{dx(t)}{dt}$	$\frac{d\widehat{x}(t)}{dt}$
$\delta(t)$	$\frac{1}{\pi t}$
e^{jt}	$-je^{jt}$
e^{-jt}	je^{-jt}
$\cos t$	$\sin t$
$\Pi(t)$	$\frac{1}{\pi}\log\left\lvert\frac{2t+1}{2t-1}\right\rvert$
$\text{sinc}t$	$\frac{1-\cos\pi t}{\pi t}$
$\frac{1}{1+t^2}$	$\frac{t}{1+t^2}$

Να υπολογιστεί ο Μ/Σ Hilbert του σήματος *x(t)*= *cos2πft*

$$X_2(f) = \frac{1}{2}[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]$$

οπότε

$$\begin{aligned}\widehat{X}_2(f) = -j\text{sgn}(f)X_2(f) &= \frac{-j}{2}[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)] \\ &= \frac{1}{2j}[\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)].\end{aligned}$$

Να υπολογιστεί ο Μ/Σ Hilbert του σήματος x(t)= 1/πt

Απάντηση

Από το Παράδειγμα 2.27 προκύπτει ότι

$$\widehat{\delta}(t) = \frac{1}{\pi t}$$

οπότε

$$\mathcal{H}[\widehat{\delta}(t)] = -\delta(t) = \mathcal{H}[\frac{1}{\pi t}].$$

Έτσι τελικά

$$\mathcal{H}[\frac{1}{t}] = \widehat{x}(t) = -\pi\delta(t).$$

Διαμόρφωση σήματος

Διαμόρφωση, είναι η διαδικασία αντιστοίχισης της πληροφορίας που μεταφέρει το σήμα βασικής ζώνης m(t) σε ένα χαρακτηριστικό ενός ζωνοπερατού σήματος, κατάλληλου για μετάδοση στο κανάλι

- Ανθρώπινη ομιλία (εύρος συχνοτήτων 20 Hz με 5 KHz).
- Δεν υπάρχουν κεραίες για συχνότητες αυτής της τάξης (μήκος κύματος της τάξης των 100 Km)

✓ Χαμηλή πολυπλοκότητα διατάξεων εκπομπή-λήψης Η/Μ ακτινοβολίας

✓ Πολυπλεξία — Κινητή Τηλεφωνία

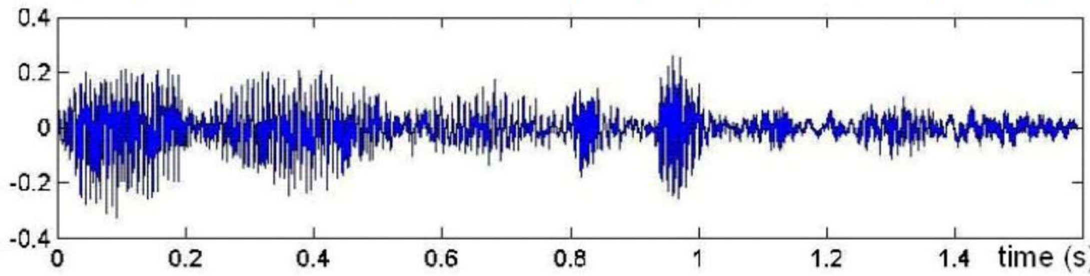
✓ Αντιμετώπιση των περιορισμών που επιβάλλει το κανάλι

✓ Διαμόρφωση για περιορισμό θορύβου και παρεμβολών

✓ Απονομή συχνοτήτων — Ραδιοφωνία-Τηλεόραση

Σήματα: Βασικής ζώνης και Ζωνοπερατό

- ✓ Σήμα βασικής ζώνης (baseband) είναι το σήμα με μη-μηδενικό φασματικό περιεχόμενο στην περιοχή γύρω από τη συχνότητα f=0 και σχεδόν μηδενικό περιεχόμενο στην υπόλοιπη περιοχή του φάσματος

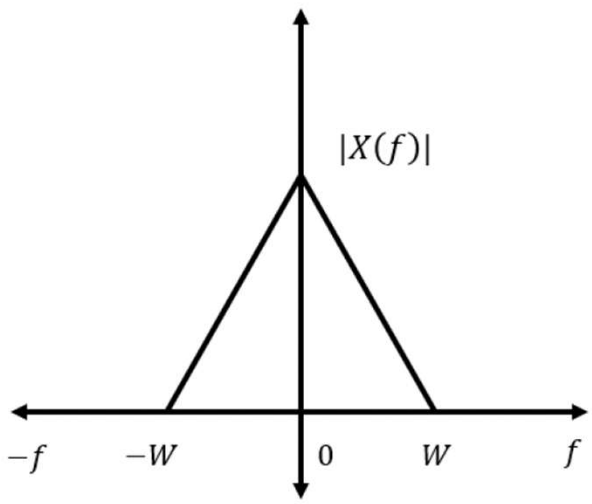


- ✓ Ζωνοπερατό (bandpass) είναι το σήμα με μη-μηδενικό φασματικό περιεχόμενο συγκεντρωμένο γύρω από μία κεντρική συχνότητα $f=\pm f_c$ (με $f_c >> 0$) και σχεδόν μηδενικό περιεχόμενο στην υπόλοιπη περιοχή του φάσματος

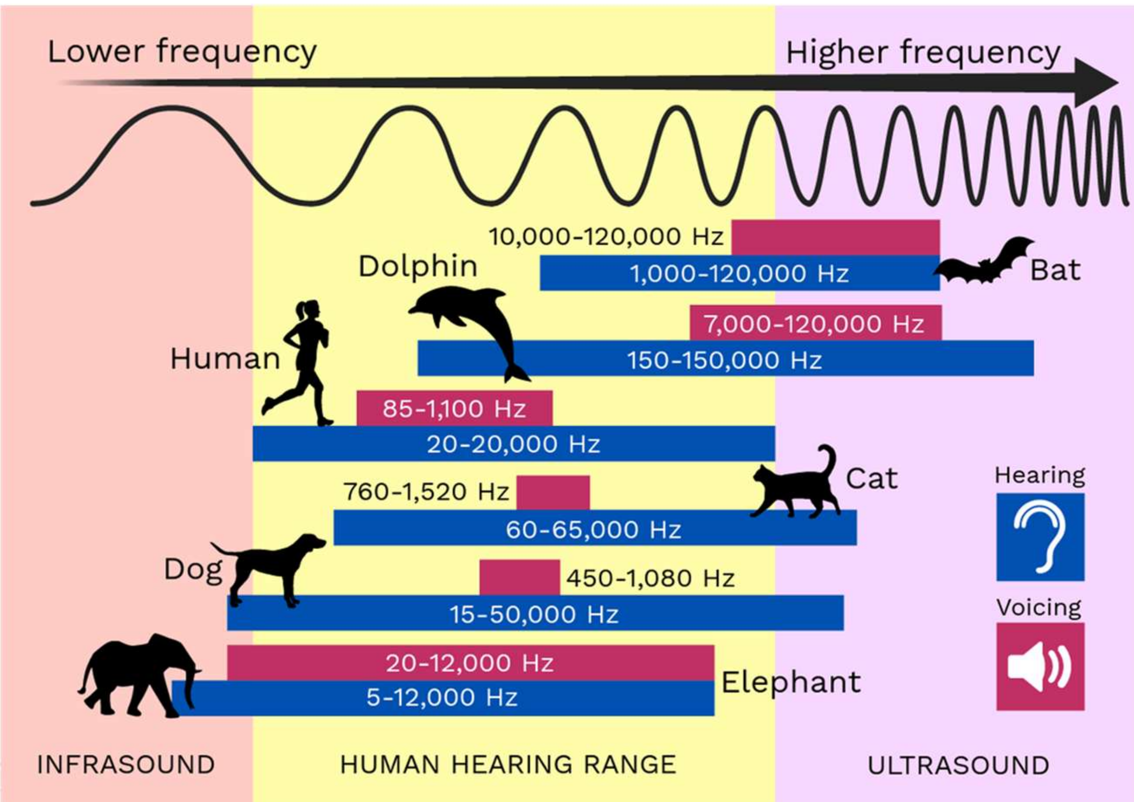
Σήμα Βασικής Ζώνης

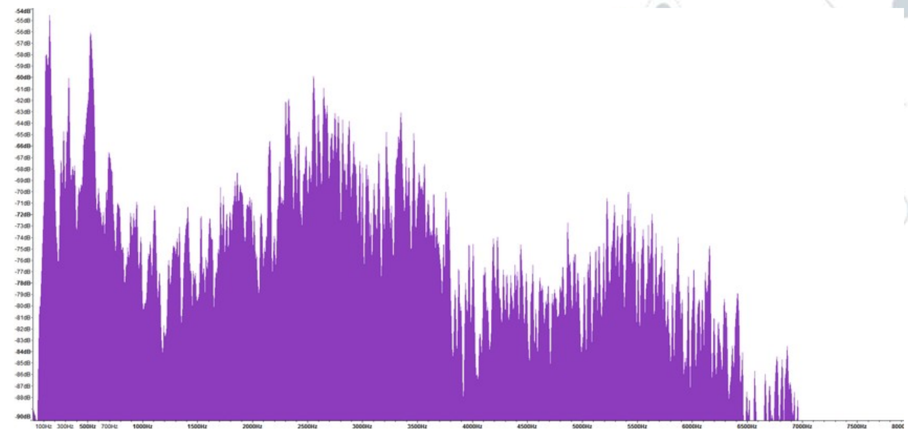
- Ένα *σήμα βασικής ζώνης* (*baseband signal*) $x(t)$ έχει το φάσμα του $X(f)$ συγκεντρωμένο γύρω από τη μηδενική συχνότητα, δηλαδή:

$$X(f) = 0, \ |f| \geq W.$$



Παραδείγματα φάσματος βασικής ζώνης





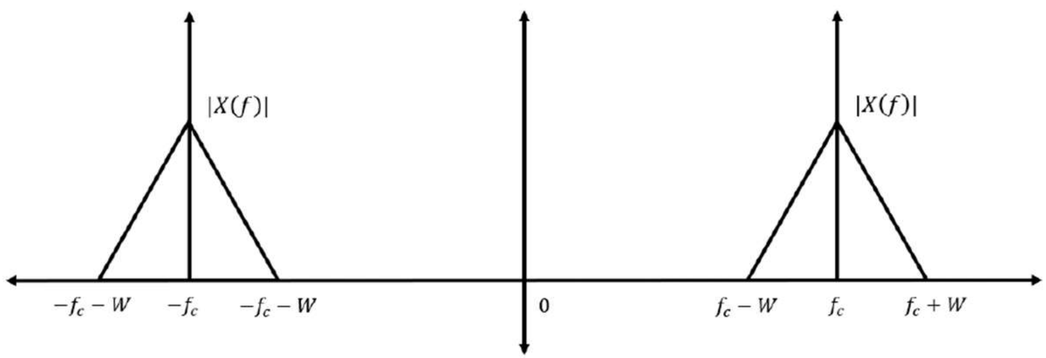
Frequency spectrum of typical human voice.

Ζωνοπερατό Σήμα

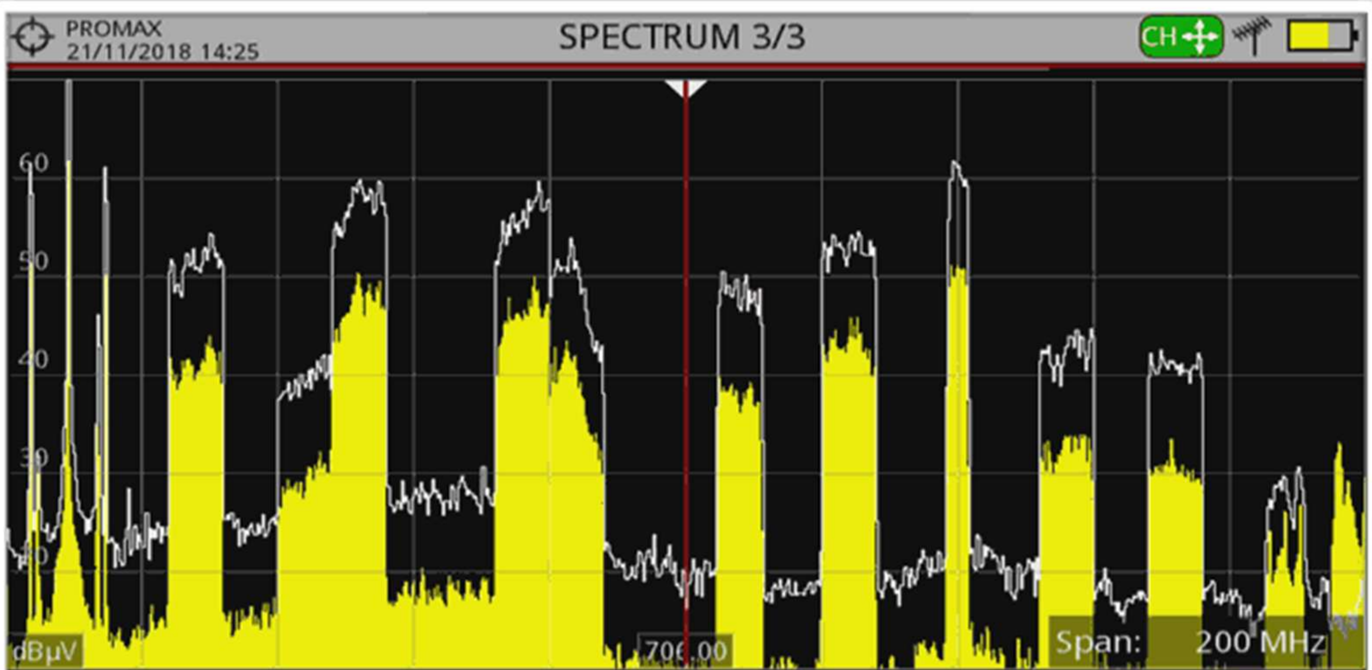
- Όταν το $x(t)$ είναι *ζωνοπερατό σήμα (passband signal)*, το $X(f)$ είναι συγκεντρωμένο γύρω από μια κεντρική συχνότητα f_c:

$$X(f) = 0, \ |f - f_c| \geq W.$$

- Αν $W \ll f_c$, to $x(t)$ ονομάζεται *σήμα στενής ζώνης (narrow signal)*.



Παραδείγματα ζωνοπερατών σημάτων



The spectrum of terrestrial analog and digital television stations

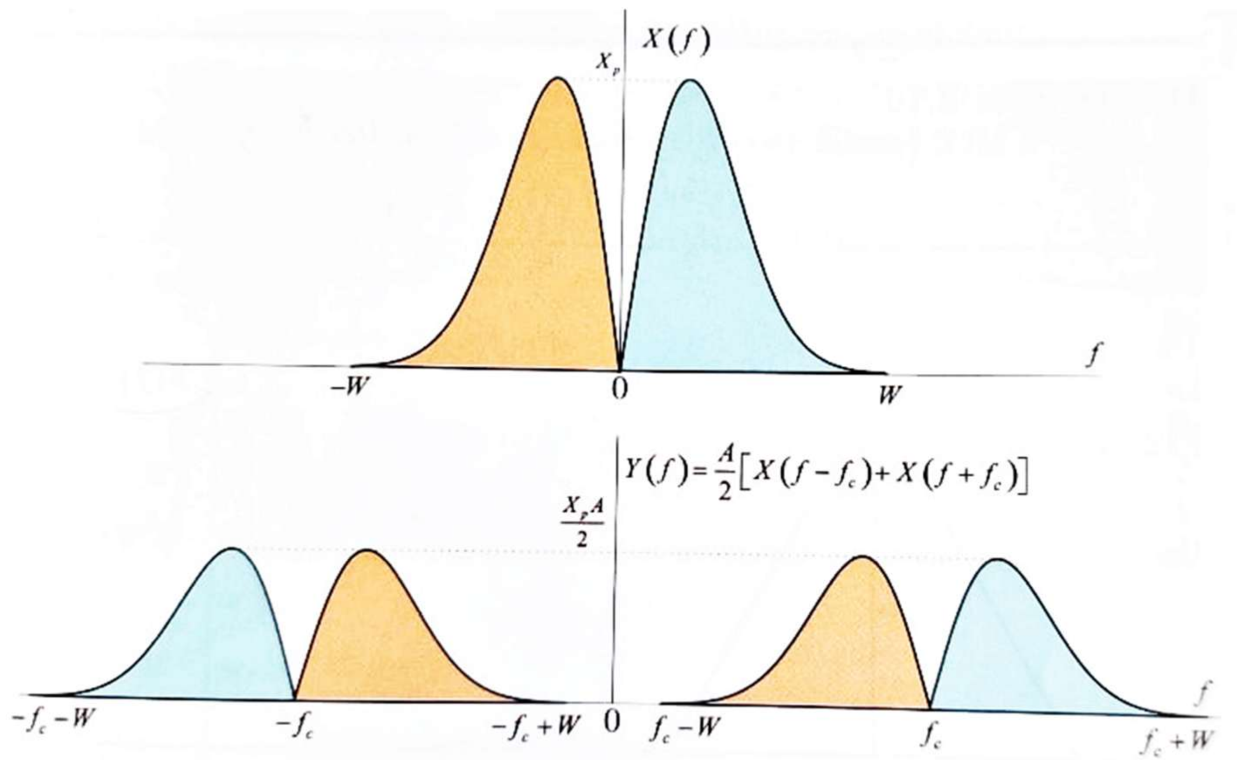
Παράδειγμα Ζωνοπερατού Σήματος

- Έστω το σήμα πληροφορίας βασικής ζώνης $m(t)$.
- Στα συστήματα επικοινωνιών το $m(t)$ είναι διαμορφωμένο είτε με αναλογική ή ψηφιακή διαμόρφωση.
- Με βάση το $m(t)$, παράγεται το ακόλουθο ζωνοπερατό σήμα:

$$x(t) = Am(t)\cos(2\pi f_c t).$$

Παράδειγμα Ζωνοπερατού Σήματος

$$y(t) = Ax(t)\cos(2\pi f_c t) \leftrightarrow Y(f) = \frac{A}{2}[X(f - f_c) + X(f + f_c)]$$



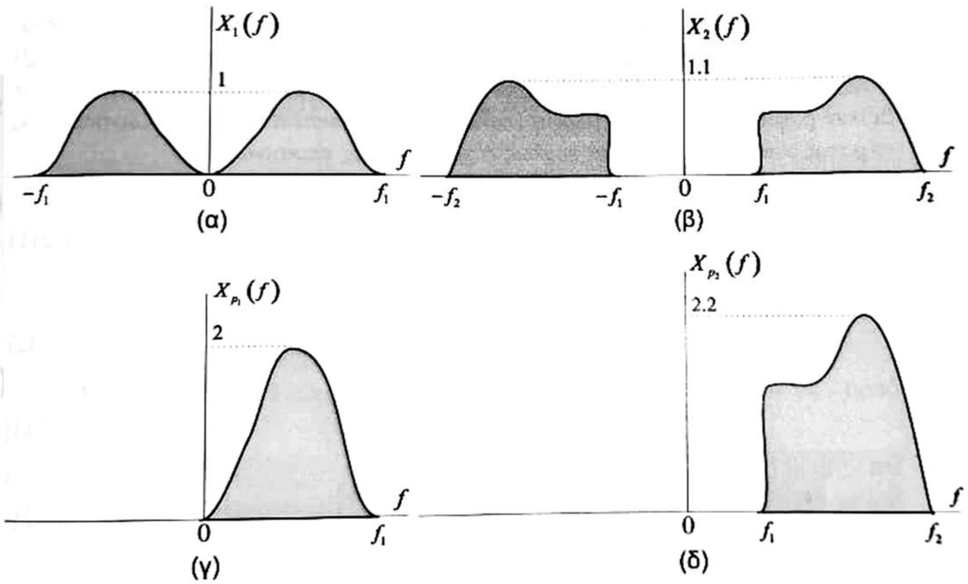
Προ-περιβάλλουσα σήματος

Αν $x(t)$ είναι ένα πραγματικό σήμα με φάσμα $X(f)$ τότε η *προ-περιβάλλουσα* (*pre-envelope*) αυτού ορίζεται ως

$$x_p(t) = x(t) + j\widehat{x}(t). \tag{2.233}$$

Λαμβάνοντας το Μ/Σ Fourier και στα δύο μέλη της (2.233) προκύπτει

$$X_p(f) = X(f) + j[-j\text{sgn}(f)X(f)] = X(f) + \text{sgn}(f)X(f)$$
$$= \begin{cases} 2X(f), & f > 0 \\ X(0), & f = 0 \\ 0, & f < 0, \end{cases} \tag{2.234}$$



Μιγαδική Περιβάλλουσα (1/2)

- Κάθε φυσικά υλοποιήσιμο (πραγματικό) ζωνοπερατό σήμα μπορεί να γραφτεί ως:

$$x(t) = \Re\left\{g(t)e^{j2\pi f_c t}\right\}.$$

- Το σήμα $g(t)$ είναι το μιγαδικό σήμα πληροφορίας βασικής ζώνης ή το ισοδύναμο χαμηλοπερατό σήμα του $x(t)$ ή η *μιγαδική περιβάλλουσα (complex envelope)*:

$$g(t) = x_p(t)e^{-2\pi f_c t},$$

όπου $x_p(t) \triangleq x(t) + j\mathcal{H}\{x(t)\} = g(t)e^{2\pi f_c t}$ είναι η *προ-περιβάλλουσα (pre-envelope)* του $x(t)$.

- Το $x_p(t)$ έχει φασματικό περιεχόμενο μόνο στη θετική περιοχή των συχνοτήτων και χρησιμοποιείται στην ανάλυση ζωνοπερατών σημάτων.

Μιγαδική Περιβάλλουσα (2/2)

- Έστω η IQ αναπαράσταση του $g(t)$:

$$g(t) = x_{\mathrm{I}}(t) + jx_{\mathrm{Q}}(t).$$

- Τότε, προκύπτει (*κανονική μορφή*):

$$\begin{aligned} x(t) &= \Re\left\{g(t)e^{j2\pi f_c t}\right\} \\ &= \Re\left\{e^{j2\pi f_c t}x_{\mathrm{I}}(t) + je^{j2\pi f_c t}x_{\mathrm{Q}}(t)\right\} \\ &= x_{\mathrm{I}}(t)\cos(2\pi f_c t) - x_{\mathrm{Q}}(t)\sin(2\pi f_c t). \end{aligned}$$

- Αν το $g(t)$ είναι πραγματικό, τότε $x_{\mathrm{Q}}(t) = 0$, άρα:

$$x(t) = x_{\mathrm{I}}(t)\cos(2\pi f_c t) = g(t)\cos(2\pi f_c t).$$

IQ Συνιστώσες και Πολική Μορφή

$$x(t) = x_I(t)\cos(2\pi f_c t) - x_Q(t)\sin(2\pi f_c t)$$

Συμφασική (In-phase) συνιστώσα

Βασικής ζώνης

Ορθογώνια (Quadrature) συνιστώσα

Περιβάλλουσα $V(t) = \sqrt{x_I^2(t) + x_Q^2(t)}$

Φάση $\theta(t) = \tan^{-1}\left[\frac{x_Q(t)}{x_I(t)}\right]$

IQ Συνιστώσες και Πολική Μορφή

- Τα $x_{\mathrm{I}}(t)$ και $x_{\mathrm{Q}}(t)$ ονομάζονται η συμφασική κι η ορθογώνια συνιστώσα, αντίστοιχα, του $x(t)$.
- Το σήμα $g(t)$ δύναται να εκφραστεί στην πολική μορφή: $g(t) = V(t)e^{j\theta(t)}$, όπου:

$$V(t) = \sqrt{x_{\mathrm{I}}^2(t) + x_{\mathrm{Q}}^2(t)},$$
$$\theta(t) = \tan^{-1}\left(\frac{x_{\mathrm{Q}}(t)}{x_{\mathrm{I}}(t)}\right).$$

- Επίσης, προκύπτουν:

$$x_{\mathrm{I}}(t) = \Re\left\{g(t)\right\} = V(t)\cos(\theta(t)),$$
$$x_{\mathrm{Q}}(t) = \Im\left\{g(t)\right\} = V(t)\sin(\theta(t)).$$

- Τέλος: $x(t) = V(t)\cos\left(2\pi f_c t + \theta(t)\right)$.

Παράδειγμα Διαμόρφωσης

- Ένα *διαμορφωμένο κατά πλάτος* (*AM: amplitude modulation*) σήμα πληροφορίας $m(t)$ έχει μιγαδική περιβάλλουσα:

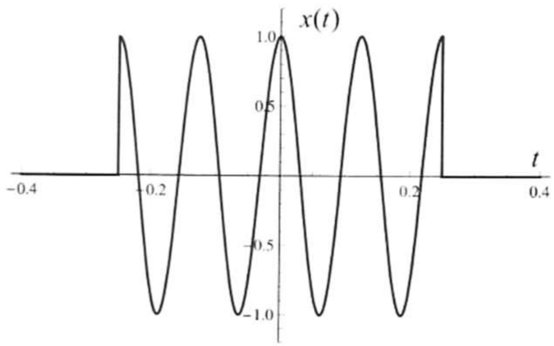
$$g(t) = V(t) = A_c + m(t).$$

- Συνεπώς:

$$x_{\mathrm{I}}(t) = A_c + m(t),$$
$$x_{\mathrm{Q}}(t) = 0.$$

Παράδειγμα Διαμόρφωσης

Να βρεθούν η μιγαδική περιβάλλουσα g(t), η περιβάλλουσα V(t) και η φάση θ(t) του σήματος του σχήματος



Σχήμα 2.27: Σήμα του Παραδείγματος 2.31 με $T = 0.5\,\mathrm{sec}$ και $f_c = 8\,\mathrm{Hz}$

προκύπτει

$$x_I(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \text{ και } x_Q(t) = 0. \qquad (2.255)$$

Έτσι από την (2.239) θα ισχύει

$$g(t) = x_I(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \qquad (2.256)$$

και

$$g(t) = V(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right),\ \theta(t) = 0. \qquad (2.257)$$

Παράδειγμα Διαμόρφωσης 2

Άσκηση 8

Να υπολογιστεί το φάσμα του σήματος $x(t) = \Re[g(t)e^{j2\pi f_c t}]$ ως συνάρτηση του φάσματος $G(f) \triangleq \mathcal{F}\{g(t)\}$.

Παράδειγμα Διαμόρφωσης 2

Ένα ζωνοπερατό σήμα

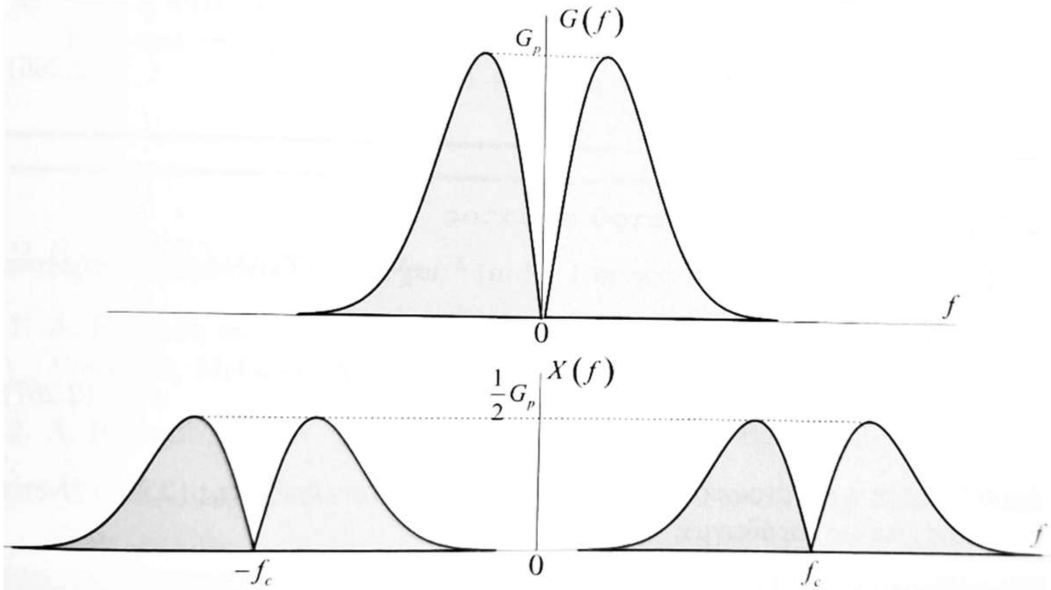
$$x(t) = \mathrm{Re}[g(t)e^{j2\pi f_c t}]$$

έχει φάσμα που δίνεται από τη σχέση

$$X(f) = \frac{1}{2}[G(f - f_c) + G^*(-f - f_c)].$$

Η ΦΠΙ του $x(t)$ θα είναι

$$S_x(f) = \frac{1}{4}[S_g(f - f_c) + S_g(-f - f_c)]$$

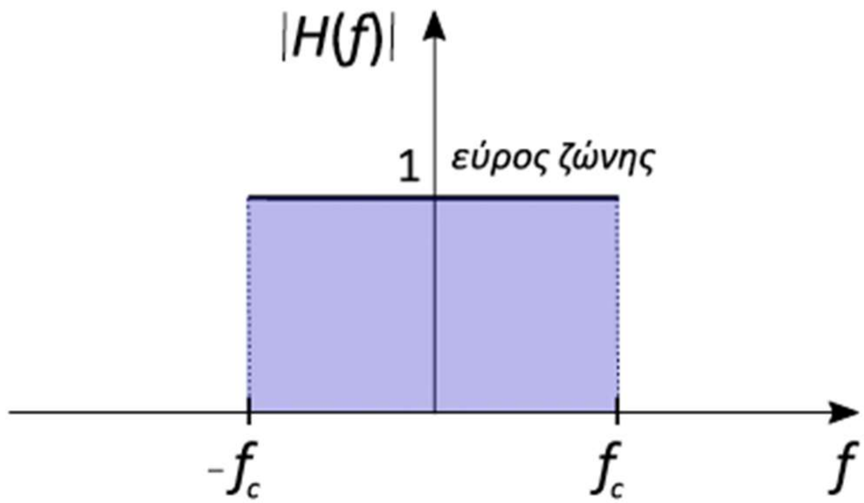


Σχήμα 2.28: Φάσμα ζωνοπερατού σήματος

Η Έννοια του Φίλτρου

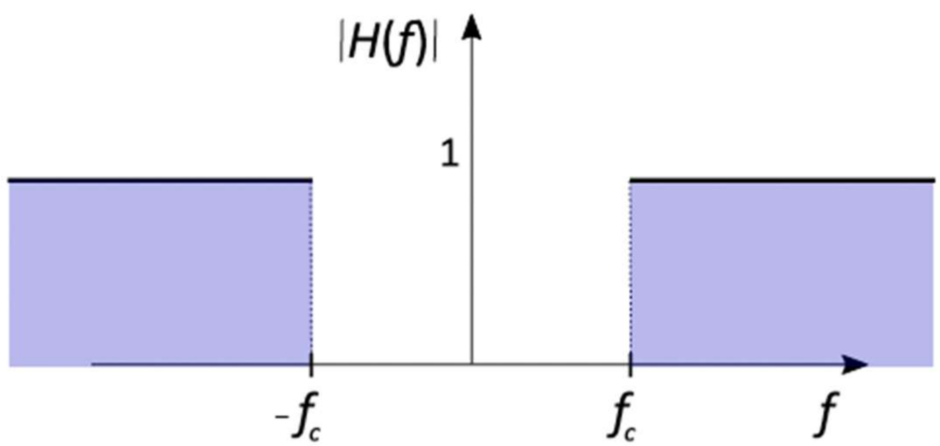
- Συνήθως, πρόκειται για σύστημα που ακυρώνει κάποιες από τις συχνότητες του σήματος εισόδου του επιτρέποντας τη διέλευση κάποιων άλλων.
- Τα φίλτρα ταξινομούνται σε *κατωπερατά* ή *βαθυπερατά* *(lowpass)*, *υψιπερατά* *(highpass)*, *ζωνοπερατά* *(bandpass)* κι *απόρριψης ζώνης* *(bandstop)*, ανάλογα με τα χαρακτηριστικά τους στο πεδίο της συχνότητας.

Η Ιδανική Απόκριση Βαθυπερατού Φίλτρου

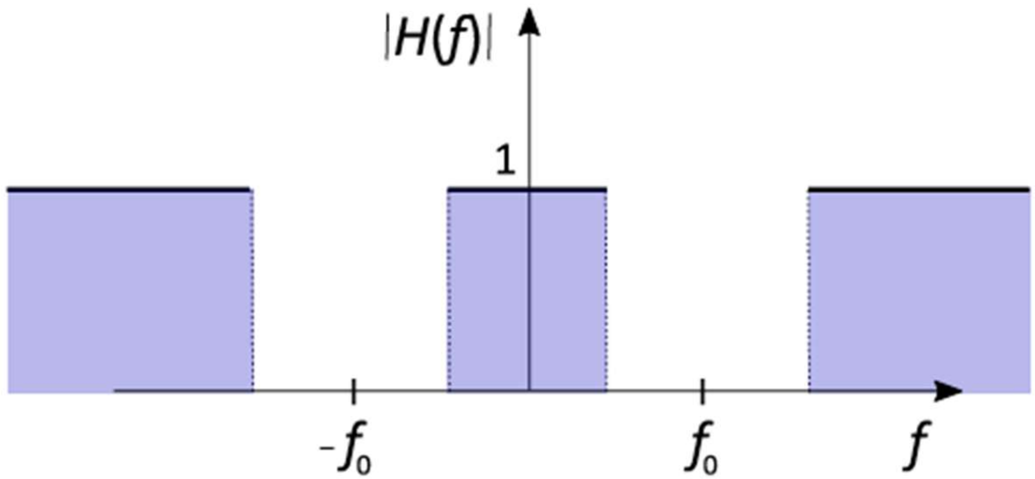


- f_c: συχνότητα αποκοπής (cutoff frequency).

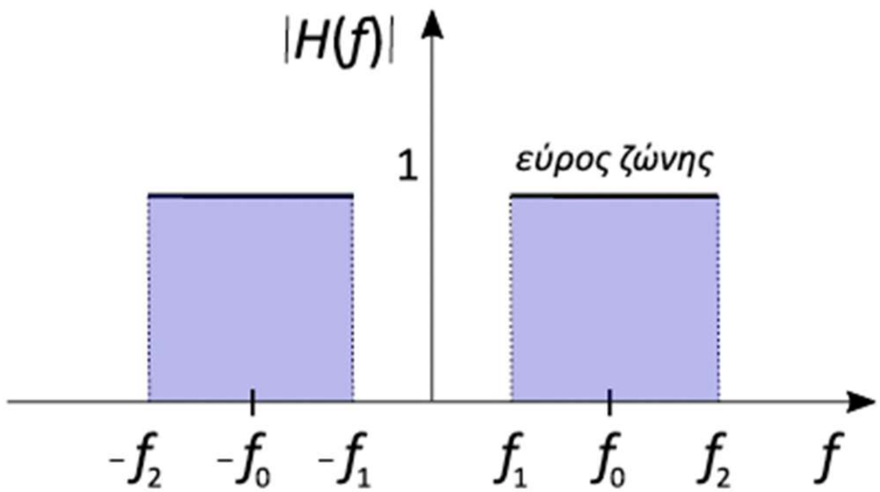
Η Ιδανική Απόκριση Υψιπερατού Φίλτρου



Η Ιδανική Απόκριση Φίλτρου Απόρριψης Ζώνης



Η Ιδανική Απόκριση Ζωνοπερατού Φίλτρου

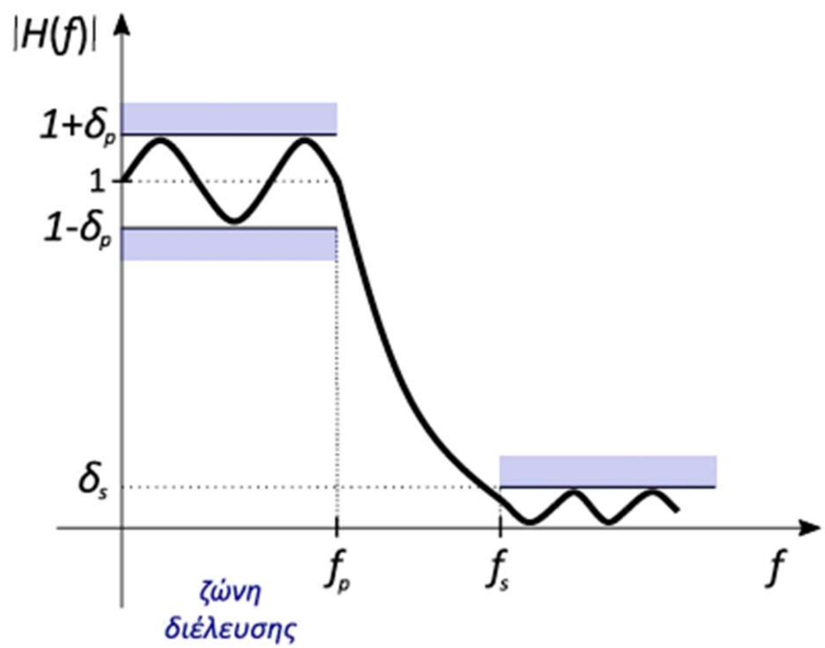


- f_1 και f_2: συχνότητες αποκοπής (cutoff frequencies).

Περιοχές Συχνοτήτων στα Φίλτρα

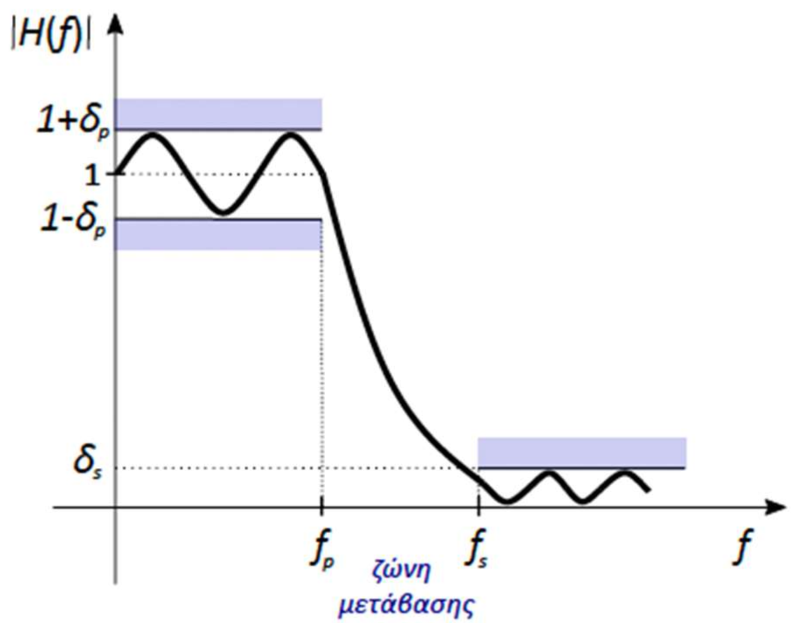
- Η περιοχή συχνοτήτων στην οποία επιτρέπεται η διέλευση αποτελεί τη *ζώνη διέλευση (passband)* του φίλτρου.
- Αντιθέτως, η περιοχή συχνοτήτων στην οποία δεν επιτρέπεται η διέλευση ονομάζεται *ζώνη απόκριψης* ή *ζώνη αποκοπής (stopband)* του φίλτρου.
- Τα ιδανικά φίλτρα έχουν ζώνη διέλευσης σταθερού κέρδους (δηλαδή σταθερής τιμής πλάτους) και ζώνη αποκοπής μηδενικού κέρδους.

Η Απόκριση Μη Ιδανικού Βαθυπερατού Φίλτρου (1/5)



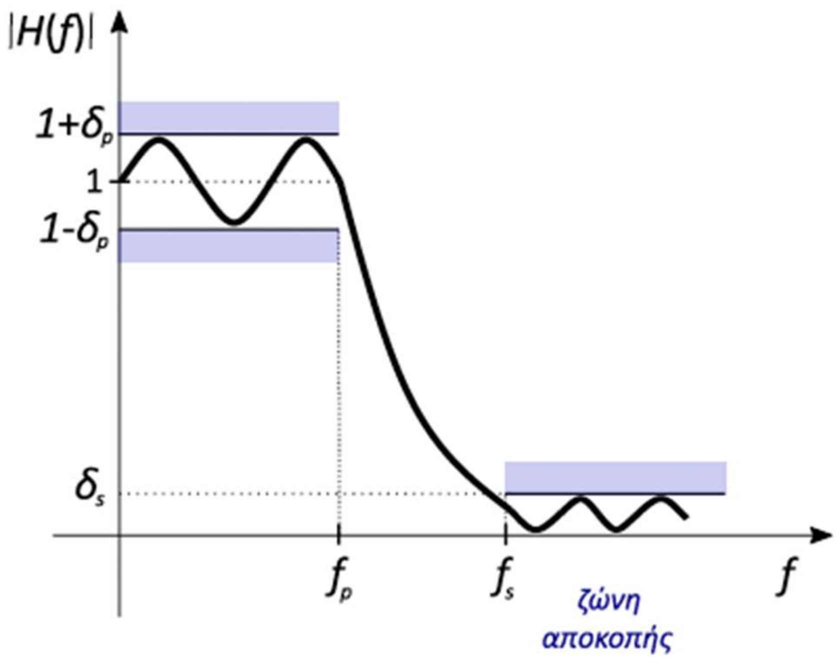
- Η ζώνη διέλευσης στην πράξη.

Η Απόκριση Μη Ιδανικού Βαθυπερατού Φίλτρου (2/5)



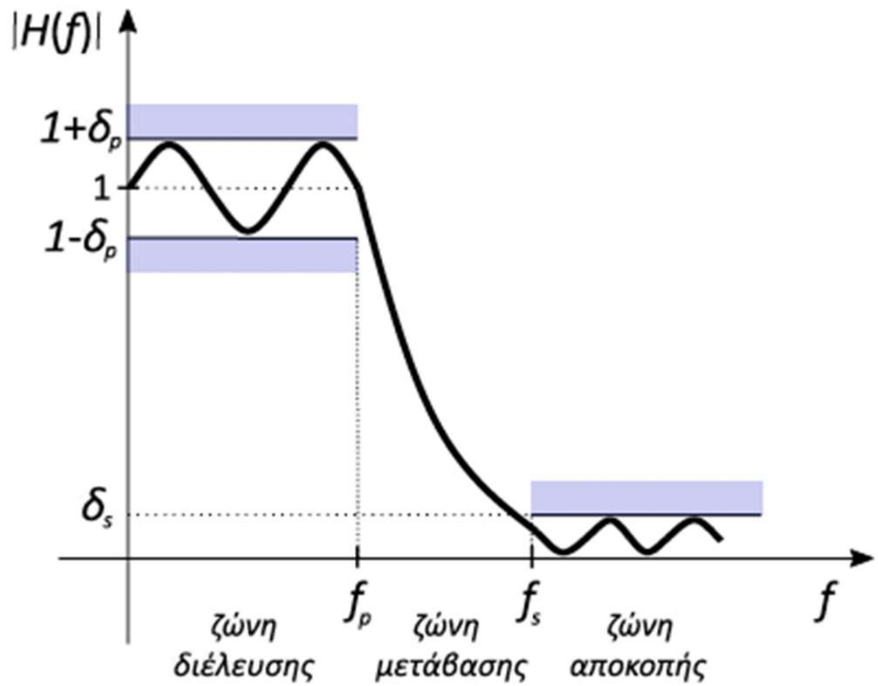
- Η *ζώνη μετάβασης* (*transition band*) καθορίζεται από τα f_p και f_s.

Η Απόκριση Μη Ιδανικού Βαθυπερατού Φίλτρου (3/5)



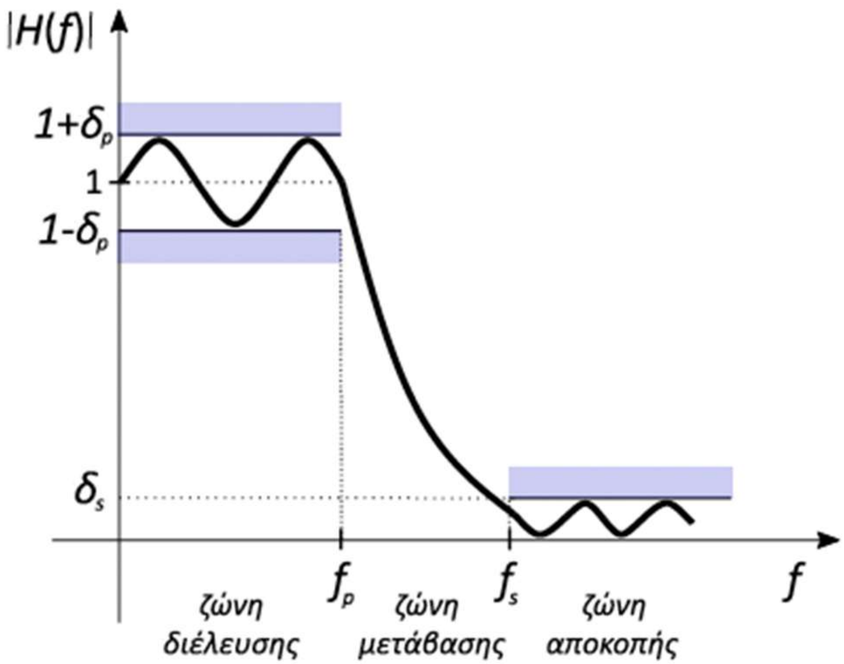
- Η ζώνη αποκοπής στην πράξη.

Η Απόκριση Μη Ιδανικού Βαθυπερατού Φίλτρου (4/5)



- Τα δ_p και δ_s καθορίζουν την *κυμάτωση* (*ripple*) από τα 1 και 0.

Η Απόκριση Μη Ιδανικού Βαθυπερατού Φίλτρου (4/5)



- Ως κέρδος (gain) σε dB ορίζεται: $20 \log_{10}(|H(f)|)$.

Τέλος μαθήματος

- Ερωτήσεις?