K21 - Συστήματα Επικοινωνιών

4ο Εξάμηνο
Τομέας Γ’ / Τμήμα Πληροφορικής και Επικοινωνιών
ΕΚΠΑ 2024-2025
Τυχαίες διαδικασίες

Γιώργος Κανέλλος

Επίκουρος Καθηγητής
Τμήμα Πληροφορικής και Επικοινωνιών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
gtkanellos@di.uoa.gr

Συστήματα Επικοινωνιών

Τυχαίες Διαδικασίες
- ❖ Στασιμότητα
- ❖ Φάσμα

Θερμικός Θόρυβος
- ❖ Λευκός Θόρυβος
- ❖ Τυπική Διάταξη Δέκτη

Τυχαίες Διαδικασίες (1/2)

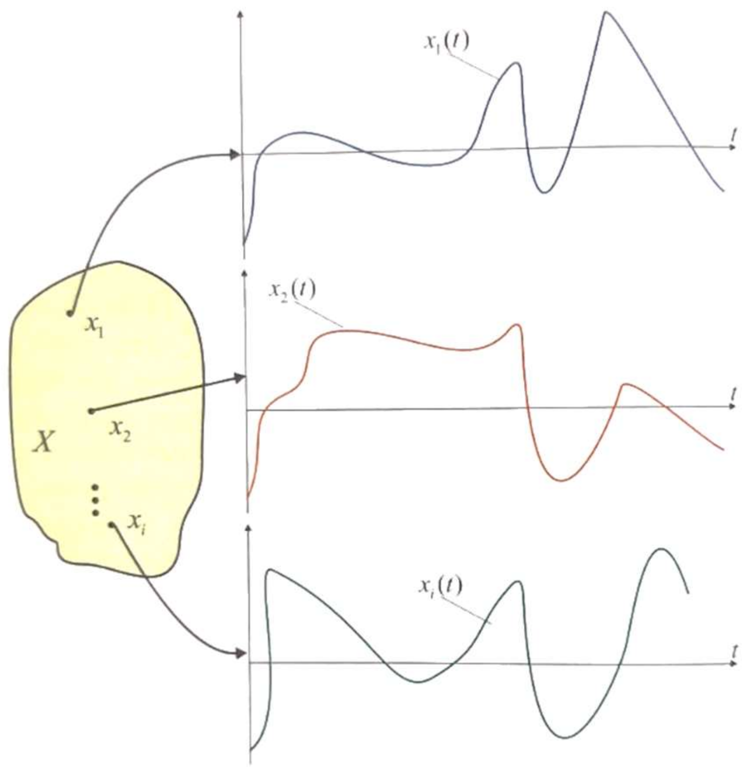
- Έστω το σήμα $x(t) = Acos(2\pi f_0 t + \phi)$ όπου το ϕ είναι τυχαία μεταβλητή με τιμές στο διάστημα $[-\pi, \pi]$.
- Έστω ο συμβολισμός $x_i(t)$ για το τυχαίο σήμα $x(t)$ για συγκεκριμένο ϕ_i. Το $x_i(t)$ ονομάζεται *δείγμα* του τυχαίου σήματος.
- Το σύνολο $X(t) \triangleq \{x_i(t) | \forall \phi_i \in [-\pi, \pi]\}$ ονομάζεται *Τυχαία Διαδικασία (ΤΔ)*.

Τυχαίες Διαδικασίες (2/2)

Συνοπτικά:

- $x_i(t)$: κυματομορφή δείγμα.
- $X(t_i)$: Τυχαία Διαδικασία (ΤΔ) που προκύπτει από τη τυχαία μεταβλητή (ΤΜ) τη χρονική στιγμή t_i.
- $x_i(t_j)$: τιμή της κυματομορφής με φάση ϕ_i τη χρονική στιγμή t_j.

Τυχαία διαδικασία



Σχήμα 3.1: Τυχαία διαδικασία

Παράδειγμα Τυχαίας Διαδικασίας (1/3)

Παράδειγμα

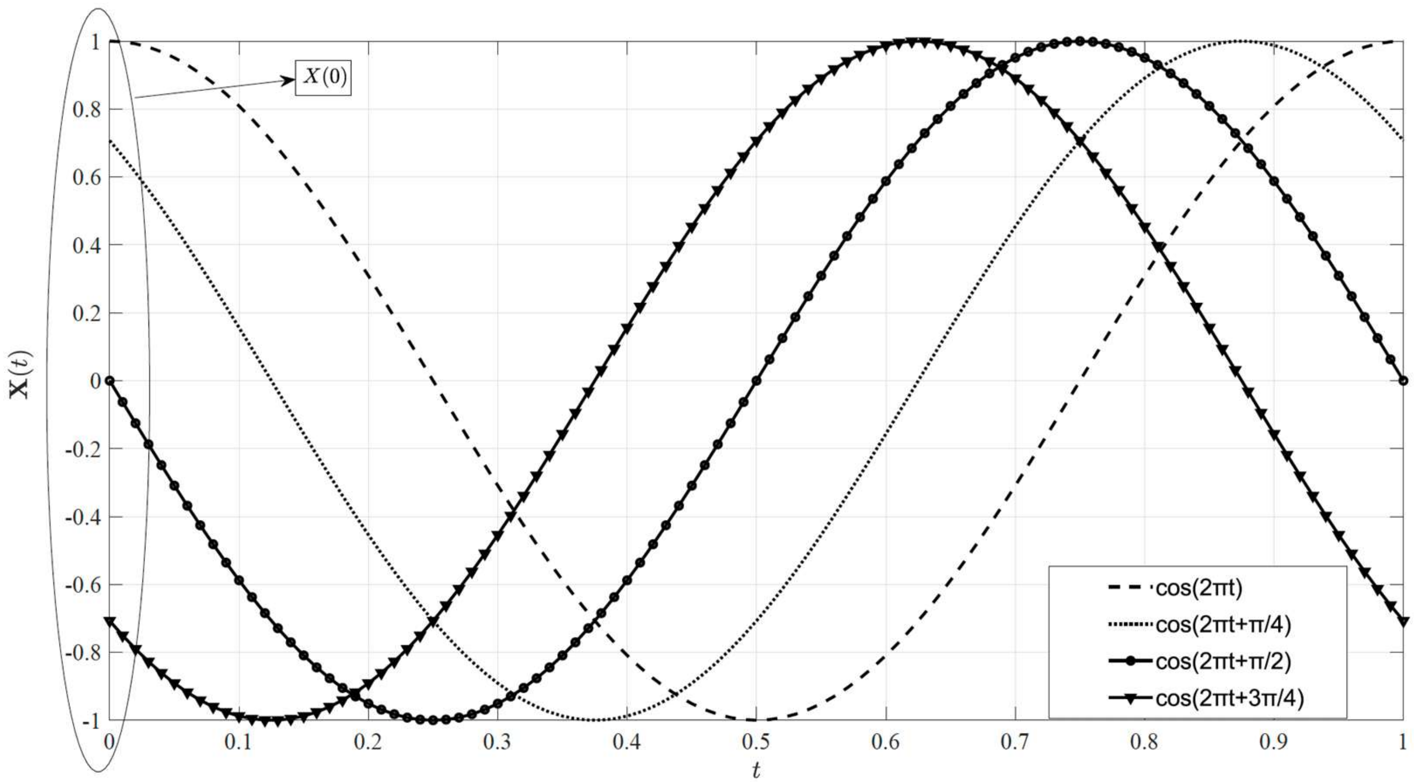
Έστω η ΤΔ $X(t) = cos(2\pi t + \phi)$ όπου ϕ ΤΜ που παίρνει τις τιμές $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$ με ίση πιθανότητα.

- Οι ισοπίθανες κυματομορφές δείγματα είναι:

$$x_1(t) = cos(2\pi t), \qquad x_2(t) = cos(2\pi t + \frac{\pi}{4}),$$

$$x_3(t) = cos(2\pi t + \frac{\pi}{2}), \qquad x_4(t) = cos(2\pi t + \frac{3\pi}{4}).$$

Παράδειγμα Τυχαίας Διαδικασίας (2/3)



Παράδειγμα Τυχαίας Διαδικασίας (3/3)

- Η *συνάρτηση μάζας πιθανότητας* (*probability mass function*) της διακριτής ΤΜ $X(0)$ είναι:

$$f_{X(0)}(a) = \begin{cases} 0.25, & a = 1 \\ 0.25, & a = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0.25, & a = 0 \\ 0.25, & a = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} .$$

- Στην περίπτωση συνεχούς ΤΜ ορίζεται η *συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας* (*probability density function*).

Κατηγορίες Τυχαίων Διαδικασιών

- *Συνεχούς χρόνου:* η ΤΔ $X(t) = \{X(t_1), X(t_2), ..\}$ είναι συλλογή από ΤΜ με $t_1, t_2, \ldots \in \mathbb{R}$.
- *Διακριτού χρόνου:* η ΤΔ $X(t) = \{X(t_1), X(t_2), \ldots\}$ είναι συλλογή (άπειρη ή πεπερασμένη) από ΤΜ με $t_1, t_2, \ldots \in \mathbb{Z}$.
- Συνεχής: Αν η ΤΜ $X(t_i)$ $\forall i$ παίρνει τιμές σε ένα συνεχές διάστημα.
- Διακριτή: Αν η ΤΜ $X(t_i)$ $\forall i$ παίρνει μόνο διακριτές τιμές.

Μέση Τιμή

- Η μέση τιμή της ΤΔ $X(t)$:

$$m_X(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} a f_{X(t)}(a) da \quad (\text{συνεχής ΤΔ}),$$

$$m_X(t) \triangleq \sum_{-\infty}^{\infty} a_i \Pr\left[x_i(t) = a_i\right] \quad (\text{διακριτή ΤΔ}).$$

- Η $m_X(t)$ είναι συνάρτηση του χρόνου με τιμές για κάθε χρονική στιγμή t_i:

$$m_X(t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} a f_{X(t_i)}(a) da.$$

Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης

- Η *συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (autocorrelation function)*:

$$R_X(t_i, t_j) \triangleq E[X(t_i)X(t_j)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} ab f_{X(t_i),X(t_j)}(a, b) da db.$$

- Για πραγματικές ΤΔ η συνάρτηση αυτή είναι συμμετρική:

$$R_X(t_i, t_j) = R_X(t_j, t_i).$$

Αυτοσυνδιακύμανση και Ετεροσυσχέτιση

- Η *συνάρτηση αυτοσυνδιακύμανσης (autocovariance function)* ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} \mathrm{C}_X(t_i, t_j) &\triangleq E[(X(t_i) - m_X(t_i))\,(X(t_j) - m_X(t_j))] \\ &= R_X(t_i, t_j) - m_X(t_i)m_X(t_j). \end{aligned}$$

- Η *συνάρτηση ετεροσυσχέτισης (cross-correlation function)* ορίζεται για δύο ΤΔ $X(t)$ και $Y(t)$ ως:

$$\begin{aligned} R_{X,Y}(t_1, t_2) &\triangleq E[X(t_1)Y(t_2)], \\ R_{Y,X}(t_1, t_2) &= E[Y(t_1)X(t_2)]. \end{aligned}$$

Ετεροσυνδιακύμανση

- Η *συνάρτηση ετεροσυνδιακύμανσης* (*cross-covariance function*) ορίζεται για δύο ΤΔ $X(t)$ και $Y(t)$ ως:

$$\mathrm{C}_{X,Y}(t_1, t_2) \triangleq R_{X,Y}(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_Y(t_2).$$

- Οι ΤΔ $X(t)$ και $Y(t)$ είναι *ορθογώνιες* μεταξύ τους αν:

$$R_{X,Y}(t_1, t_2) = 0 \quad \forall t_1, t_2.$$

- Οι ΤΔ $X(t)$ και $Y(t)$ είναι *ασυσχέτιστες* αν:

$$\mathrm{C}_{X,Y}(t_1, t_2) = 0 \quad \forall t_1, t_2.$$

Άσκηση 1

Άσκηση 1

Έστω η ΤΔ $X(t) = A\cos(2\pi f_1 t + \phi)$ με A και f_1 σταθερές και $\phi \sim \mathcal{U}[0, \pi]$:

$$f_\phi(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \phi \in [0, \pi] \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} .$$

Επίσης, έστω η ΤΔ $Y(t) = \alpha\cos(2\pi f_2 t)$ με f_2 σταθερά και $\alpha \sim \mathcal{U}[0, 2]$:

$$f_\alpha(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \alpha \in [0, 2] \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} .$$

Αν οι ΤΜ α και ϕ είναι ανεξάρτητες, να υπολογιστούν: $m_X(t)$, $m_Y(t)$, $R_X(t_1, t_2)$, $R_{X,Y}(t_1, t_2)$ και $\mathrm{C}_{\mathrm{X,Y}}(t_1, t_2)$.

Λύση Άσκησης 1 (1/5)

- Η μέση τιμή $m_X(t)$ υπολογίζεται:

$$
\begin{aligned}
m_X(t) &= \int_0^{\pi} A\cos(2\pi f_1 t + \phi)\, f_\phi(\phi) d\phi = \frac{A}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(2\pi f_1 t + \phi)\, d\phi \\
&= \int_0^{\pi} \frac{A}{\pi}\left(\frac{d}{d\phi}\sin(2\pi f_1 t + \phi)\right) d\phi \\
&= \frac{A}{\pi}[\sin(2\pi f_1 t + \pi) - \sin(2\pi f_1 t)] \\
&= \frac{A}{\pi}[-\sin(2\pi f_1 t) - \sin(2\pi f_1 t)] \\
&= -\frac{2A}{\pi}\sin(2\pi f_1 t).
\end{aligned}
$$

Λύση Άσκησης 1 (2/5)

- Ανάλογα, η μέση τιμή $m_Y(t)$ υπολογίζεται:

$$
\begin{aligned}
m_Y(t) &= \int_0^2 \alpha \cos(2\pi f_2 t)\, f_\alpha(\alpha) d\alpha \\
&= \cos(2\pi f_2 t) \int_0^2 \frac{\alpha}{2} d\alpha \\
&= \cos(2\pi f_2 t) \left[\frac{\alpha^2}{4}\right]_0^2 = \cos(2\pi f_2 t).
\end{aligned}
$$

Λύση Άσκησης 1 (3/5)

- Η ΣΑΣ $R_X(t_1, t_2)$ υπολογίζεται:

$$
\begin{aligned}
R_X(t_1, t_2) &= E[A\cos(2\pi f_1 t_1 + \phi)A\cos(2\pi f_1 t_2 + \phi)] \\
&= \frac{A^2}{2} E\left[\cos(2\pi f_1(t_1 + t_2) + 2\phi) + \cos(2\pi f_1(t_1 - t_2))\right] \\
&= \frac{A^2}{2} \underbrace{E\left[\cos(2\pi f_1(t_1 + t_2) + 2\phi)\right]}_{=0} + \frac{A^2}{2} E\left[\cos(2\pi f_1(t_1 - t_2))\right] \\
&= \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_1(t_1 - t_2)).
\end{aligned}
$$

Λύση Άσκησης 1 (4/5)

- Η ετεροσυσχέτιση υπολογίζεται ως $R_{X,Y}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)]$.
- Λόγω ανεξαρτησίας των ΤΜ α και ϕ προκύπτει:

$$\begin{aligned} R_{X,Y}(t_1, t_2) &= E[X(t_1)]E[Y(t_2)] = m_X(t_1)m_Y(t_2) \\ &= -\frac{2A}{\pi}\sin(2\pi f_1 t_1)\cos(2\pi f_2 t_2). \end{aligned}$$

Λύση Άσκησης 1 (5/5)

- Η ετεροσυνδιακύμανση υπολογίζεται:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{C}_{X,Y}(t_1, t_2) &= R_{X,Y}(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_Y(t_2) \\
&= m_X(t_1)m_Y(t_2) - m_X(t_1)m_Y(t_2) = 0.
\end{aligned}
$$

- Συνεπώς, οι ΤΔ $X(t)$ και $Y(t)$ είναι ασυσχέτιστες, αναμενόμενο λόγω της ανεξαρτησίας των ΤΜ α και ϕ.

Αυστηρά Στάσιμη

- Η ΤΔ X(t) είναι *αυστηρά στάσιμη* (stationary in the strict sense) αν $\forall \tau$ οι ΤΔ $X(t)$ και $X(t+\tau)$ έχουν την ίδια στατιστική:

$$f_{X(t_1),X(t_2),\ldots}(a_1, a_2, \ldots) = f_{X(t_1+\tau),X(t_2+\tau),\ldots}(a_1, a_2, \ldots) \text{ ή}$$
$$f_{X(t)}(\mathbf{a}) = f_{X(t+\tau)}(\mathbf{a}).$$

- Ορίζονται κι οι στασιμότητες μικρότερων τάξεων, πχ:
  - 1ης τάξης: $f_{X(t_1)}(a) = f_{X(t_1+\tau)}(a)$,
  - 2ης τάξης: $f_{X(t_1),X(t_2)}(a_1, a_2) = f_{X(t_1+\tau),X(t_2+\tau)}(a_1, a_2)$.

Στάσιμη Υπό την Ευρεία Έννοια (1/2)

- Μια ΤΔ $X(t)$ λέγεται *στάσιμη υπό την ευρεία έννοια (wide sense stationary)* αν:
  - $m_X(t) = m_X \; \forall t$,
  - $R_X(t_i, t_j) = R_X(t_i - t_j) = R_X(\tau)$.
- Δηλαδή, η μέση τιμή της $X(t)$ είναι σταθερή $\forall t$ κι η ΣΑΣ της εξαρτάται μόνο απο τη διαφορά των δειγματολειπτημένων χρόνων και όχι από κάθε ζεύγος χρονικών στιγμών χωριστά.

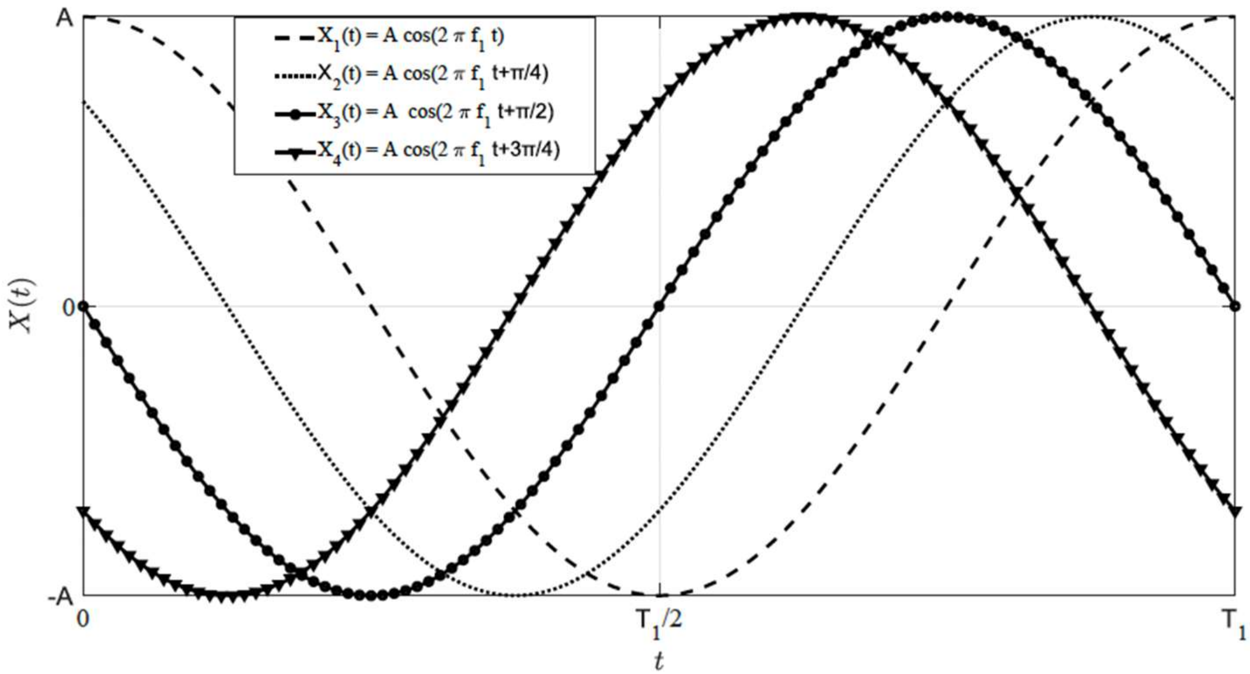
Στάσιμη Υπό την Ευρεία Έννοια (2/2)

- Η αυτοσυνδιακύμανση είναι επίσης συνάρτηση μόνο της χρονικής μετατόπισης τ, δηλαδή $\mathrm{C}_X(\tau) \triangleq \mathrm{C}_X(t, t+\tau) = R_X(\tau) - m_X^2$.
- Η στατιστική μέση τιμή είναι ανεξάρτητη του χρόνου και μπορεί να υπολογισθεί οποιαδήποτε χρονική στιγμή.
- Όταν μια ΤΔ είναι στάσιμη υπό την αυστηρή έννοια τότε είναι και στάσιμη υπό την ευρεία έννοια, το αντίστροφο δεν ισχύει.

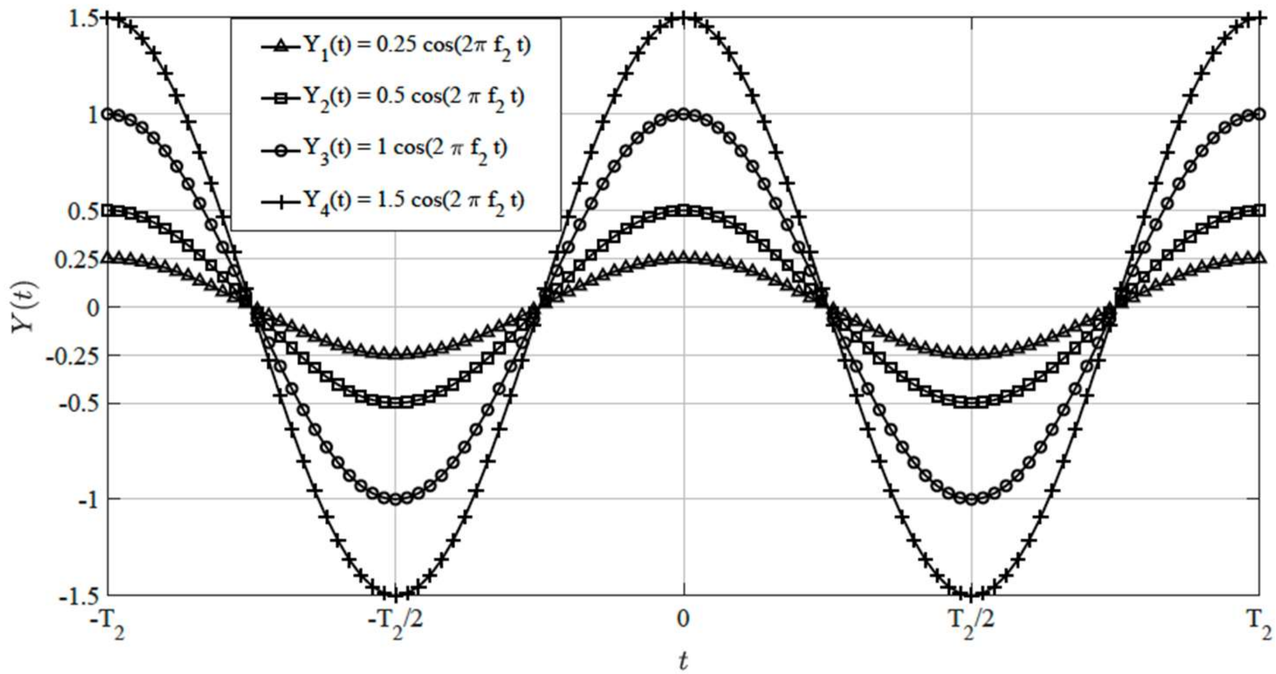
Παράδειγμα

- Οι ΤΔ $X(t)$ και $Y(t)$ της Άσκησης 1 δεν είναι WSS αφού:
  - $E[X(t)] = -\frac{2A}{\pi}\sin(2\pi f_1 t)$,
  - $E[Y(t)] = \cos(2\pi f_2 t)$.

Συναρτήσεις Δείγματα της $X(t) = A\cos(2\pi f_1 t + \phi)$



Συναρτήσεις Δείγματα της Y (t) = α cos(2πf$_2$t)



Ασκήσεις 2 και 3

Άσκηση 2

Να δειχθεί ότι η ΤΔ $Z(t) = A\cos(2\pi f t + \theta)$ με A και f σταθερές και $\theta \sim \mathcal{U}[0, 2\pi]$ είναι WSS.

Άσκηση 3

Να δειχθεί ότι εάν μια ΤΔ WSS $X(t)$ έχει σταθερή μέση τιμή $m_X \neq 0$ τότε η ΣΑΣ της $R_X(\tau)$ έχει ένα σταθερό όρο.

Λύση Άσκησης 3

- Η $X(t)$ μπορεί να γραφτεί ως $X(t) = m_X + N(t)$, όπου $N(t)$ μια ΤΔ με μηδενική μέση τιμή.
- Η ΣΑΣ της $X(t)$ υπολογίζεται:

$$
\begin{aligned}
R_X(\tau) &= E[X(t)X(t+\tau)] = E[(m_X + N(t))(m_X + N(t+\tau))] \\
&= E[m_X^2 + m_X N(t) + m_X N(t+\tau) + N(t)N(t+\tau)] = \\
&= m_X^2 + m_X E[N(t)] + m_X E[N(t+\tau)] + E[N(t)N(t+\tau)] \\
&= m_X^2 + R_N(\tau).
\end{aligned}
$$

Χρονική Μέση τιμή και ΣΑΣ

- Για κάθε κυματομορφή δείγμα $x_i(t)$ της ΤΔ $X(t)$ ορίζονται η χρονική μέση τιμή κι η ΣΑΣ της:

$$E[x_i(t)] \triangleq \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_i(t)dt,$$

$$R_{x_i}(\tau) \triangleq \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_i(t)x_i(t+\tau)dt.$$

Εργοδικότητα ως προς τη Μέση τιμή

- Μια στάσιμη ΤΔ $X(t)$ ονομάζεται *εργοδική ως προς τη μέση τιμή* αν οι χρονικές μέσες τιμές των κυματομορφών δειγμάτων της είναι ίσες μεταξύ τους:

$$E[x_i(t)] = E[X(t)] \quad \forall i.$$

- Στην περίπτωση αυτή ισχύει για την ΤΔ $X(t)$ ότι:

$$E[X(t)] = m_X.$$

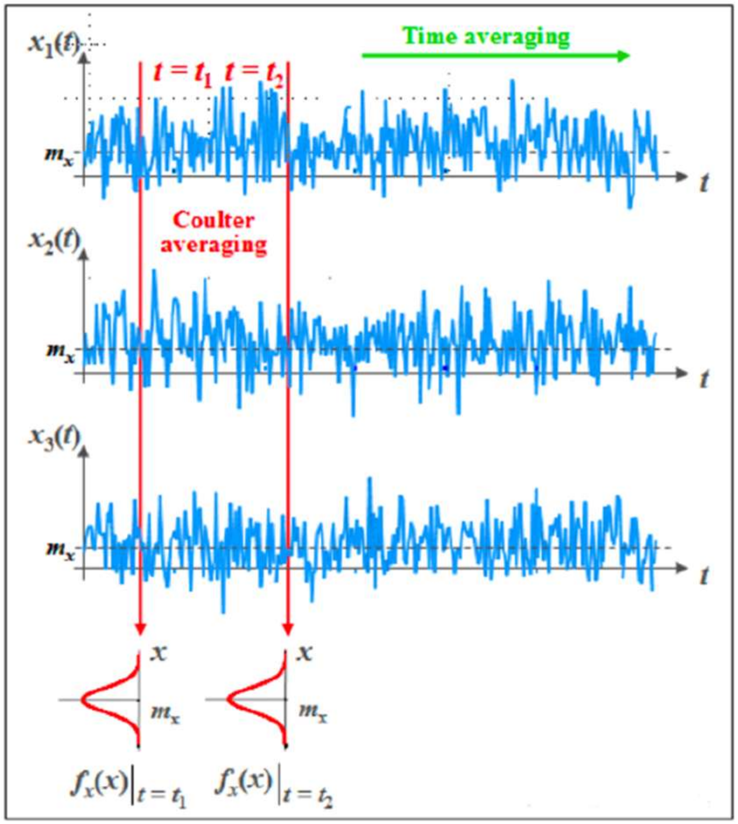
Εργοδικότητα ως προς την ΣΑΣ

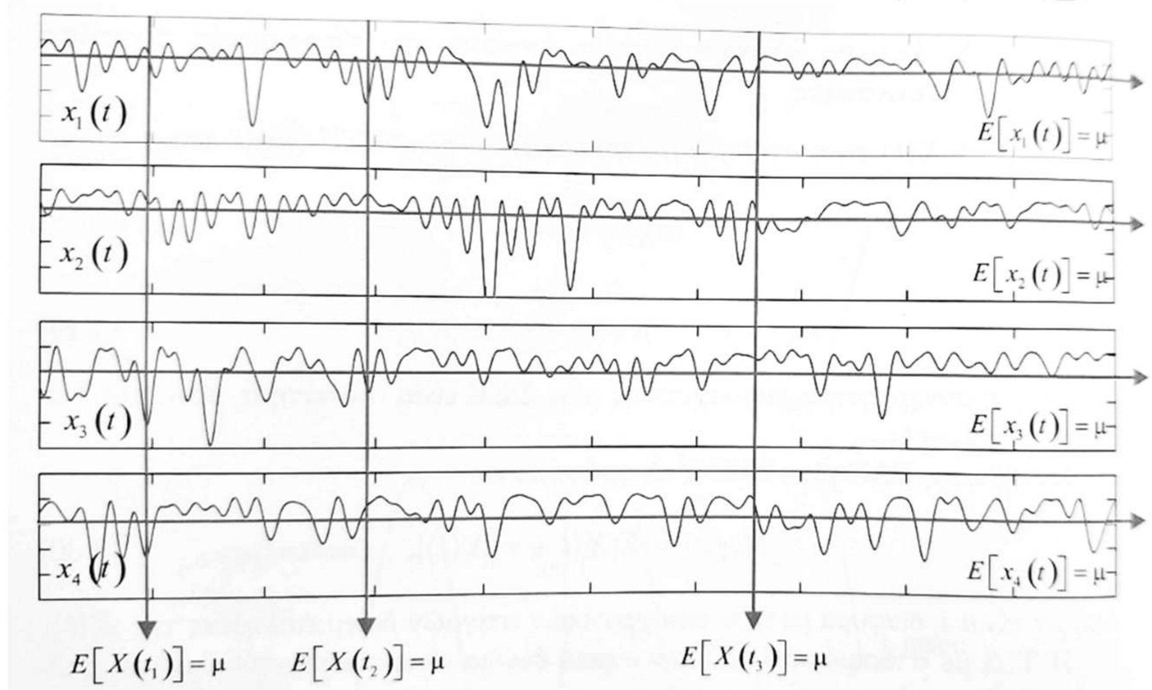
- Μια στάσιμη ΤΔ $X(t)$ ονομάζεται *εργοδική ως προς την αυτοσυσχέτιση* αν οι χρονικές αυτοσυσχετίσεις των κυματομορφών δειγμάτων της είναι ίσες μεταξύ τους και ίσες με την στατιστική ΣΑΣ:

$$R_{x_i}(\tau) = R_X(\tau) \quad \forall i.$$

- Στα ΣΕ, οι ΤΔ υπό μελέτη θεωρούνται (συνήθως) εργοδικές ως προς τη ΣΑΣ.
- Η εργοδικότητα αποτελεί πολύ σημαντική ιδιότητα καθώς παρατηρώντας το $x_i(t)$ για μια κυματομορφή δείγμα προκύπτει πληροφορία για *ολόκληρη* την ΤΔ $X(t)$.

Εργοδική Διαδικασία





Σχήμα 3.5: Εργοδική τυχαία διαδικασία

Άσκηση 5

Άσκηση 5

Εξετάστε ως προς την εργοδικότητα την ΤΔ
$Z(t) = Acos(2\pi ft + \theta)$ της Άσκησης 2.

Λύση Άσκησης 5 (1/3)

- Έστω η κυματομορφή δείγμα της ΤΔ $Z(t)$:
  $z_i(t) = A\cos(2\pi ft + \theta_i)$. Αρκεί να δείξουμε ότι:
  $E[z_i(t)] = E[Z(t)] = m_Z \; \forall i$.
- Συνεπώς:

$$E[z_i(t)] = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} z_i(t)dt = A \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi ft + \theta_i)dt$$

$$= \frac{A}{2\pi f} \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left(\frac{d}{dt} \sin(2\pi ft + \theta_i) \right) dt$$

$$= \frac{A}{2\pi f} \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \left[\sin\left(2\pi f(T/2) + \theta_i\right) - \sin\left(2\pi f(-T/2) + \theta_i\right) \right]$$

$$= 0.$$

Λύση Άσκησης 5 (2/3)

- Εργοδικότητα ως προς την αυτοσυσχέτιση: $R_{z_i}(\tau) = R_Z(\tau)\ \forall i$.
- Συνεπώς:

$$R_{z_i}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} z_i(t) z_i(t+\tau) dt$$

$$= A^2 \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi f t + \theta_i) \cos(2\pi f(t+\tau) + \theta_i) dt$$

$$= \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f \tau) \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 1 dt$$

$$+ \frac{A^2}{2} \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi f(2t+\tau) + 2\theta_i) dt$$

Λύση Άσκησης 5 (3/3)

- Άρα:

$$
\begin{aligned}
R_{z_i}(\tau) = & \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f\tau) \\
& + \frac{A^2}{8\pi f}\underbrace{\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\sin(2\pi f(T+\tau)+2\theta_i)}_{=0,\ \text{αφού } |\sin(a)|\leq 1} \\
& - \frac{A^2}{8\pi f}\underbrace{\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\sin(2\pi f(-T+\tau)+2\theta_i)}_{=0} \\
= & \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f\tau).
\end{aligned}
$$

Φασματική Πυκνότητα Ισχύος

- Η *φασματική πυκνότητα ισχύος* (*power spectral density*) ενός σήματος ισχύος προκύπτει από το μετασχηματισμό Fourier της ΣΑΣ του.
- Με τον ίδιο τρόπο ορίζεται κι η ΦΠΙ μιας στάσιμης (αυστηρά ή υπό την ευρεία έννοια) ΤΔ:

$$\mathcal{S}_X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau,$$
$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{S}_X(f) e^{j2\pi f\tau} df.$$

- Στα σήματα ισχύος, η τιμή της ΣΑΣ στο σημείο $\tau = 0$ παρέχει την ισχύ του σήματος, το ίδιο ισχύει και για τις WSS ΤΔ:

$$R_X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{S}_X(f) df = E[X^2(t)] = \mathcal{P}_X.$$

Συνέλιξη

- Η πράξη της γραμμικής συνέλιξης φανερώνει τον τρόπο με τον οποίο συνδέεται στο πεδίο του χρόνου η έξοδος ενός συστήματος ΓΧΑ με την είσοδό του.
- Η συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου μετασχηματίζεται σε πολλαπλασιασμό στο πεδίο της συχνότητας.
- Έστω ότι η WSS ΤΔ $X(t)$ διέρχεται από ένα σύστημα ΓΧΑ με κρουστική απόκριση $h(t)$. Ισχύει για τη WSS ΤΔ $Y(t)$ της εξόδου:

$$Y(t) = X(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

Η ΣΑΣ της Εξόδου Συστήματος ΓΧΑ

- Η ΣΑΣ της εξόδου $Y(t)$:

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= E\left[Y(t)Y(t+\tau)\right] = \\ &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} X(\tau_1)h(t-\tau_1)d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau_2)h(t+\tau-\tau_2)d\tau_2\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E\left[X(\tau_1)X(\tau_2)\right] h(t-\tau_1)h(t+\tau-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned}$$

- Με τις αναθέσεις $u = t - \tau_1$ και $v = t + \tau - \tau_2$ προκύπτει:

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E\left[X(t-u)X(t+\tau-v)\right] h(u)h(v)dudv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau+u-v)h(u)h(v)dudv \\ &= R_X(\tau) * h(\tau) * h(-\tau). \end{aligned}$$

ΦΠΙ της Εξόδου Συστήματος ΓΧΑ

- Η ΦΠΙ της WSS ΤΔ $Y(t)$ προκύπτει από το μετασχηματισμό Fourier της ΣΑΣ της. Υπενθυμίζονται οι παρακάτω ιδιότητες για δύο σήματα $x(t)$ και $y(t)$:
  - $\mathcal{F}\left[x(t) * y(t)\right] = X(f)Y(f)$.
  - Αν $x(t)$ πραγματικό, τότε $X^*(f) = X(-f)$.
- Συνεπώς, για τις WSS ΤΔ $X(t)$ και $Y(t)$ προκύπτει:

$$\mathcal{S}_Y(f) = \mathcal{F}\left[R_Y(\tau)\right] = \mathcal{S}_X(f)|H(f)|^2,$$

$$\mathcal{P}_Y = E[Y^2(t)] = R_Y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{S}_X(f)|H(f)|^2 df.$$

Τέλος μαθήματος

- Ερωτήσεις?